EUCLIDES

TIJDSCHRIFT
VOOR DE DIDACTIEK VAN DE EXACTE VAKKEN

ORGAAN VAN
DE VERENIGINGEN WIMECOS EN LIWENAGEL

MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN
IN BINNEN- EN BUITENLAND

32[E] JAARGANG 1956/57
IV — 15 DECEMBER 1956

INHOUD

ERVEN P. NOORDHOFF N.V. - GRONINGEN-DJAKARTA

Het tijdschrift **Euclides** verschijnt in tien afleveringen per jaar. Prijs per jaargang *f* 8,00; voor hen die tevens geabonneerd zijn op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde is de prijs *f* 6,75.

De leden van *Wimecos* krijgen *Euclides* toegezonden als officieel orgaan van hun vereniging; het abonnementsgeld is begrepen in de contributie (*f* 8,00 per jaar, aan het begin van het verenigingsjaar (1 september t.e.m. 31 augustus) te storten op postrekening 143917 ten name van de Vereniging van Wiskundeleraren te Amsterdam).

De leden van *Liwenagel* krijgen *Euclides* toegezonden voor zover ze de wens daartoe te kennen geven en *f* 5,00 per jaar storten op postrekening 87185 van de Penningmeester van Liwenagel te Den Haag.

Boeken ter bespreking en aankondiging aan Dr. H. Mooy te Amsterdam.
Artikelen ter opname aan Dr. Joh. H. Wansink te Arnhem.
Opgaven voor de „kalender" aan H. W. Lenstra te Groningen.

Aan de schrijvers van artikelen worden gratis 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt; voor meer afdrukken overlegge men met de uitgever.

250 OPGAVEN
in de geest van het ontwerp-leerplan
van de Wimecos-commissie

VOORWOORD

1. Algemeen gedeelte

Als leden van de Wimecos-commissie, die in 1954—1955 een ontwerp-leerplan heeft samengesteld dat door de verenigingen Wimecos en Liwenagel en de Wiskunde-Werkgroep van de W.V.O. werd aanvaard, hebben we aan de voorstellen uit dit leerplan een concrete vorm willen geven door het samenstellen van 250 opgaven die volgens ons geschikt zijn als eindexamenopgaven in de geest van het ontworpen leerplan. Deze serie wordt gepubliceerd in Euclides en bovendien als afzonderlijke uitgave in de handel gebracht, zodat ze bij het onderwijs gebruikt zal kunnen worden. Dit leek ons gewenst, omdat de bestaande verzamelingen eindexamenopgaven na invoering van het nieuwe leerplan vrijwel onbruikbaar zullen zijn.

Om misverstand te voorkomen, merken we op, dat de afzonderlijke uitgave een uitgave van Wimecos is en dat de eventuele baten dus niet aan de samenstellers, maar uitsluitend aan Wimecos ten deel zullen vallen.

Van de vraagstukken die de laatste jaren op de eindexamens van het gymnasium en van de hogereburgerschool opgegeven zijn, hebben we in deze verzameling slechts die opgenomen welke hun bruikbaarheid bij de invoering van het nieuwe programma zullen behouden. Deze oude opgaven vormen slechts een klein deel van de gehele serie. Bij het selecteren van de eindexamenopgaven en bij het opstellen van nieuwe opgaven hebben we voor ogen gehouden, dat eindexamenopgaven aanleiding kunnen zijn tot een ongewenst uitgroeien van het onderwijsprogramma. Om dit toe te lichten kunnen b.v. de vraagstukken dienen die opgelost worden door de formule $p_n = p_{n-1} . t_n$ $(n > 1)$ toe te passen, waarin p_n het produkt van de eerste n termen van een reeks voorstelt. Nadat in 1951 een dergelijk vraagstuk op het eindexamen gymnasium werd opgegeven, kwamen er in 1954 en 1956 soortgelijke vraagstukken op het eindexamen hogereburgerschool voor. We hebben niet willen

bevorderen, dat door het opnemen van vraagstukken van dit type deze binnenkort ook in de leerboeken zullen verschijnen. Dit zou immers een leerstofuitbreiding betekenen waarvoor o.i. geen rechtvaardiging te vinden is op grond van de criteria die volgens de Wimecos-commissie bij de keuze van de leerstof dienen te gelden. We willen hiermee niet zeggen, dat alle opgaven met een „origineel" karakter op het eindexamen uitgesloten moeten worden. Integendeel, dergelijke vragen maken het mogelijk te onderkennen, of de prestaties van een kandidaat boven het gemiddelde liggen. We wijzen er echter met nadruk op, dat herhaald optreden van een „nieuwe vondst" gemakkelijk tot een ongewenste uitbreiding van de leerstof kan leiden.

De vraagstukken zijn, juist omdat ze ook als herhalingsvraagstukken bedoeld zijn, niet systematisch geordend. Ook is er niet naar gestreefd de vraagstukken ongeveer gelijkwaardig in omvang en moeilijkheid te maken. Het zal daarom mogelijk zijn een stel examenopgaven in de geest van deze serie te maken dat uit een klein aantal vrij gecompliceerde bestaat, maar ook een stel dat bestaat uit een groter aantal eenvoudiger opgaven. Vraagstukken waarin een aantal heterogene bestanddelen op kunstmatige wijze tot een geheel zijn verenigd en zogenaamde cascadevraagstukken zijn vermeden.

We hebben ons afgevraagd, of het wenselijk is theorievragen op te nemen. Voor zover deze zo gekozen worden, dat uit de beantwoording kan blijken of de kandidaat voldoende inzicht heeft verkregen, zijn theorievragen o.i. zeker goed te keuren. Omdat we echter van mening zijn, dat het stelselmatig optreden van theorievragen op het eindexamen docenten en leerlingen ertoe kan brengen de volledige wiskundige theorie te beschouwen als kennis die men op het examen paraat moet hebben, hebben we toch van het opnemen van dit soort vragen afgezien.

Bij de samenstelling van de serie opgaven hebben we ons gehouden aan de voorstellen die vervat zijn in het ontwerp-leerplan en de daarbij verschenen toelichting, zoals deze door Wimecos en Liwenagel zijn aanvaard (zie Euclides XXX 1954—55, p. 163 e.v.), echter met twee uitzonderingen:

a. in verband met de discussies op de ledenvergaderingen van beide verenigingen zijn geen vraagstukken opgenomen over complexe getallen;
b. in verband met de mededeling in het verslag van de Commissie, in 1955 belast met het afnemen van het examen bedoeld in art. 12 der Hoger-onderwijswet (Staatsexamen Gymnasium),

volgens welke geen vraagstukken over de reststelling op het schriftelijk eindexamen gymnasium meer opgegeven zullen worden, zijn geen vraagstukken over de in het ontwerp-programma genoemde factorstelling opgenomen.

We hebben ervan afgezien de statistiek in deze verzameling een plaats te geven. Urgent is het opstellen van eindexamenvraagstukken over statistiek nog niet, aangezien dit vak bij invoering van het nieuwe programma nog niet terstond op het schriftelijk examen gevraagd zal worden. Het leek ons bovendien niet gewenst de ontwikkeling van dit nieuwe vak door al te precieze richtlijnen al dadelijk aan banden te leggen.

Tot slot spreken we gaarne onze dank uit aan de leiding van het Pedagogisch Instituut van de Rijksuniversiteit te Utrecht die ons gastvrijheid heeft verleend bij onze bijeenkomsten en bovendien zorg gedragen heeft voor administratieve en financiële hulp, en aan de vereniging Wimecos die ons werk gestimuleerd en met materiële hulp ter zijde gestaan heeft.

2. Bespreking van de afzonderlijke vakken

Zoals hierboven vermeld, hebben we ons bij het opstellen van de vraagstukken gehouden aan het Wimecos-rapport en het bijbehorende commentaar. Bij de interpretatie hiervan zijn we echter op enkele moeilijkheden gestuit. Voor zover nodig zullen we hieronder duidelijk maken, hoe we deze moeilijkheden opgelost hebben.

a. Algebra

Kwadratische functies.

Het bleek bij het opstellen van de vraagstukken noodzakelijk een nadere uitspraak te doen omtrent het al of niet geoorloofd zijn van het voorkomen van parameters in de coëfficiënten van een kwadratische functie. Het voorkomen van parameters in de coëfficiënten van een vierkantsvergelijking wordt in het Wimecos-rapport nergens verboden; met betrekking tot de kwadratische functies is een dergelijk verbod echter wel uitgesproken.

Strikt genomen zou men nu volgens dit rapport wel mogen opgeven:

de wortels van de vergelijking $x^2+ax+a+b=0$ zijn 1 en 2; bereken a en b,

echter niet:

de nulwaarden van de functie $x^2+ax+a+b$ zijn 1 en 2; bereken a en b.

Ook zou men wel mogen opgeven:

voor welke waarden van a heeft de vergelijking $x^2+(a+2)x+$ $+1=0$ geen wortels?

echter niet:

voor welke waarden van a is de functie $x^2+(a+2)x+1$ voor elke waarde van x positief?

We hebben gemeend het rapport niet naar de letter, maar naar de geest te moeten interpreteren en hebben daarom vraagstukken van de tweede soort niet uitgesloten.

Het leek ons wel gewenst nu scherper te formuleren welke soorten vraagstukken waarbij parameters in de coëfficiënten voorkomen, we wel wensen uit te sluiten.

Dit zijn de volgende categorieën:

a. vraagstukken waarbij een parameter in de coëfficiënt van x^2 voorkomt;
b. vraagstukken die analogie vertonen met niet toegelaten vraagstukken over vierkantsvergelijkingen (zie Euclides XXX, 1954—55, p. 168);
c. vraagstukken waarin als voorwaarde gesteld wordt, dat de nulwaarden groter of kleiner dan een gegeven getal p zijn, tenzij $p=0$.

Voorbeelden van verworpen vraagstukken zijn:

1. Het minimum van

$$ax^2-(2a+6)x+4a+6$$

is gelijk aan 6. Bereken a.

2. De uiterste waarde van

$$ax^2+bx+c$$

is gelijk aan 1. Als $x=0$, dan is de functiewaarde gelijk aan 0; als $x=1$, dan is de functiewaarde gelijk aan -1. Bereken a, b en c.

3. De functies

$$(a-1)x^2-x \quad \text{en} \quad (1-2a)x^2+2x$$

hebben gelijke maxima. Bereken a.
(Vgl. ook h.b.s. 1952².)

4. De nulwaarden van

$$x^2-ax+a+b$$

zijn 2 maal zo groot als de nulwaarden van

$$-x^2+bx+a+1.$$

Bereken a en b.

5. Voor welke waarden van a ligt 3 tussen de nulwaarden van

$$-x^2+ax+a?$$

6. Voor welke waarden van a liggen de nulwaarden van

$$x^2+ax+a+1$$

beide tussen 0 en 1?

Stapelfuncties.

De wiskundige benaming voor stapelfuncties is samengestelde functies. De gekozen betiteling „stapelfunctie" heeft de bedoeling aan te geven, dat hiermee niet de meest eenvoudige samengestelde functies bedoeld zijn. We hebben dan ook vraagstukken waarin gevraagd werd de grafiek te tekenen van functies als

$$3^{2x}, \quad \sqrt{(x+1)} \text{ en } {}^2\log(x-4),$$

niet willen verwerpen.

Hoewel het rapport verbiedt te vragen naar het tekenen van de grafiek van $\sqrt{(x^2-5x+4)}$ en van ${}^2\log(x^2-9)$, menen we, dat hiermee niet uitgesloten zijn vraagstukken als:

los op $\sqrt{(x^2-5x+4)} < 2$

en

los op ${}^2\log(x^2-9) < 4.$

Deze opgaven kunnen namelijk zonder gebruik te maken van de grafieken van $\sqrt{(x^2-5x+4)}$, resp. ${}^2\log(x^2-9)$ worden opgelost met behulp van de eigenschappen van de functies $\sqrt{x}$, resp. ${}^2\log x$.

In het commentaar is als voorbeeld van een ontoelaatbare stapelvorm genoemd ${}^2\log {}^2\log x$. Dit voorbeeld achten we niet gelukkig gekozen. Wel zouden we het ontoelaatbaar achten, als gevraagd werd de grafiek van deze functie te tekenen. We zouden het echter geenszins ongeoorloofd vinden, te laten onderzoeken voor welke waarden van x deze vorm betekenis heeft.

Reeksen.

Opgaven waarin de termen van een reeks in groepen met een variabel aantal termen worden verdeeld, zoals h.b.s. 1949[5], hebben

we geacht te behoren tot de verwerpelijke rubriek van gekunstelde opgaven en dus niet opgenomen.

b. Infinitesimaalrekening

In de serie opgaven over infinitesimaalrekening vindt men geen vraagstukken die betrekking hebben op goniometrische functies of op inhoudsberekeningen. Deze zijn opgenomen in de series over goniometrie en stereometrie.

c. Goniometrie

De vraagstukken over goniometrie hebben een geheel ander karakter dan die welke tot dusver op de eindexamens werden opgegeven. Slechts enkele opgaven van het eindexamen hogereburgerschool van de laatste jaren waarin het functiebegrip een rol speelt, leenden zich voor opname in deze serie.

We zien als einddoel van het onderwijs in de goniometrie het doen verkrijgen van inzicht in de goniometrische functies. Het grootste deel van de opgaven heeft dan ook op deze functies betrekking. Daarnaast komen opgaven voor over goniometrische vergelijkingen en ongelijkheden. De vraagstukken over goniometrische vergelijkingen hebben alleen betrekking op vergelijkingen met één onbekende, zodat de bekende typen waarin de som of het verschil van twee hoeken en de som, het verschil, het produkt of het quotiënt van twee goniometrische verhoudingen voorkomt (zoals $x+y = 60°$ en $\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{4}$), niet zijn opgenomen. In verband hiermee leek het ons gewenst ook andere vraagstukken die opgelost worden door een produkt van twee goniometrische verhoudingen tot een som of verschil te herleiden, uit te sluiten. Hierdoor is bereikt dat de training in het herleiden van een produkt van twee goniometrische verhoudingen tot een som of verschil overbodig is geworden.

Doordat de goniometrische functies als het voornaamste onderwerp van de goniometrie beschouwd zijn, spelen de toepassingen van de differentiaalrekening een belangrijke rol in de vraagstukken. Ook zijn enkele opgaven opgenomen waarbij goniometrische functies geïntegreerd moeten worden.

Het spreekt vanzelf, dat wegens het centraal stellen van de goniometrische functies steeds verondersteld wordt, dat het argument van de functie in radialen uitgedrukt is. Bij gebrek aan tafels waarin de waarden van de sinus, cosinus en tangens gegeven worden voor in radialen uitgedrukte waarden van het argument, is

bij uitkomsten die door middel van een tafel verkregen worden, genoegen genomen met een in graden en minuten uitgedrukt antwoord.

d. Stereometrie

De stereometrievraagstukken hebben betrekking op concrete lichamen. Abstracte opgaven over meetkundige plaatsen en ruimteconstructies, in de trant van recente opgaven van het eindexamen gymnasium, zijn vervangen door opgaven waarbij de meetkundige plaats of de constructie te pas gebracht wordt in b.v. een kubus, een blok of een piramide. Van deze figuur moet dan een scheve projectie getekend worden.

Veel belang is gehecht aan het maken van een goede stereometrische figuur. O.i. moet de eis gesteld worden, dat de stereometrische figuur volgens een verantwoorde methode de een of andere projectie van het bedoelde lichaam voorstelt. In overeenstemming met het Wimecos-programma en de daarbij verschenen toelichting is daarvoor de methode van de scheve parallelprojectie gekozen. Omdat in de meeste leerboeken die op het ogenblik bij het V.H.M.O. in gebruik zijn, de scheve projectie nog niet wordt behandeld, hebben we een korte theorie van deze projectiemethode aan de serie vraagstukken over stereometrie laten voorafgaan.

De constructies die aan de orde komen, vallen uiteen in drie groepen:

a. die waarbij het lichaam een voorgeschreven stand heeft t.o.v. het tafereel, terwijl de projectierichting bepaald wordt door aan een punt van het horizontale vlak een punt van het tafereel als projectie toe te voegen;
b. die waarbij het lichaam een voorgeschreven stand heeft t.o.v. het tafereel, terwijl de projectierichting door wijkhoek en verkorting bepaald wordt;
c. die waarbij de leerling vrij blijft in de keuze van de stand t.o.v. het tafereel en in de keuze van de projectierichting.

Wat de opgaven van de laatste categorie betreft, merken we nog op, dat het de bedoeling is, dat de leerling niet slechts een of andere figuur als projectie ontwerpt, maar ook aangeeft welke stand het lichaam t.o.v. het tafereel heeft en welke de projectierichting is.

Ten slotte bevat de serie ook opgaven waarbij een stereometrische figuur overbodig is, b.v. vraagstukken waarbij de infinitesimaalrekening op de stereometrie moet worden toegepast.

Van veel belang achten we, dat in de stereometrische figuur punten, lijnen en vlakken die aan bepaalde voorwaarden voldoen,

geconstrueerd kunnen worden. In de opgaven spelen de eigenschappen van de loodrechte stand van lijnen en vlakken een belangrijke rol. De berekeningen van oppervlakten en inhouden zijn geheel op de achtergrond gekomen. Alleen de belangrijkste formules worden hier bekend ondersteld; afzonderlijke training in het berekenen van oppervlakten en inhouden is daardoor overbodig geworden.

e. Analytische meetkunde

In hoofdzaak is de traditie gevolgd die zich bij het eindexamen gymnasium gevormd heeft. Vraagstukken die weinig inzicht vorderen, maar wel uitgebreide becijferingen, hebben we vermeden.

De samenstellers:

C. J. Alders;
L. N. H. Bunt;
A. Holwerda;
P. G. J. Vredenduin;
Joh. H. Wansink.

ALGEBRA

Algemene opmerkingen.

1. Bij het oplossen van de vraagstukken moet men uitsluitend reële getallen beschouwen.
2. t_k stelt de k^{de} term van een reeks voor; s_k de som van de eerste k termen (waarbij $s_1 = t_1$); s de som van de reeks.
3. v stelt het verschil van een rekenkundige reeks voor; r de reden van een meetkundige reeks.
4. In vraagstukken over vierkantsvergelijkingen stellen x_1 en x_2 de wortels van de vergelijking voor.

Vraagstukken.

1. a. Onderzoek, zonder van een tafel gebruik te maken, welk van de getallen ${}^7\log 5$ en $\frac{5}{7}$ het grootst is.
   b. Ga na, met behulp van een logaritmentafel, welk van de getallen $0{,}6^{0,4}$ en $0{,}4^{0,6}$ het grootst is.

2. Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$.
   a. Bewijs dat $f(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$.
   b. Welke waarden van x voldoen aan de vergelijking

$$f(x)+f(-x) = \tfrac{5}{2}?$$

3. a. Bewijs dat de vergelijking

$$ax^2-(a-1)x-4a = 0$$

voor elke waarde van a minstens één wortel heeft.
   b. Welke waarde kan $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}$ niet aannemen?

4. Van een meetkundige reeks met positieve termen is gegeven

$$t_1-t_2 = \tfrac{1}{10} \quad \text{en} \quad t_{11}-t_{12} = \tfrac{1}{20}.$$

Bereken de kleinste waarde van k waarvoor geldt

$$t_k-t_{k+1} < \tfrac{1}{30}.$$

5. Gegeven is de vergelijking

$$ax^2-ax+a+1 = 0.$$

Voor welke waarden van a is $|x_1-x_2| \leqq 1$?

6. Los op:
a. $0{,}8^{x+3} > 0{,}8^{2x-1}$;
b. $0{,}2^{x+3} > 0{,}2^{x-3}$;
c. $3^{2x-5} < 3^{2x+5}$.

7. Teken in één figuur de grafieken van de functies

$${}^2\log x,\ {}^2\log |x| \text{ en } |{}^2\log x|.$$

8. Van een reeks is gegeven

$$s_k = k^2 - 4k.$$

a. Druk t_k in k uit.
b. Bewijs dat de reeks rekenkundig is.
c. Voor welk rangnummer x geldt $x \,.\, t_x = t_{3x}$?

9. Voor welke waarden van p heeft de vergelijking

$$x^2 + x\,{}^2\log p + 1 = 0$$

twee verschillende wortels?

10. Voor elke x geldt

$$(x-a)(x-b) = x^2 + ax + b.$$

Bereken a en b.

11. Welke waarden kunnen x en y aannemen, als

$$x^2 + xy + y^2 = 12?$$

12. Van een meetkundige reeks is $t_1 = -1$ en $r = -\frac{1}{2}$. Bereken de kleinste waarde van k waarvoor $|s - s_k| < 10^{-6}$.

13. a. Teken in één figuur de grafieken van de functies

$$x+2 \quad \text{en} \quad \sqrt{(4-x)}.$$

b. Los nu de ongelijkheid $x+2 > \sqrt{(4-x)}$ op.

14. Bewijs dat voor een rekenkundige reeks voor elk rangnummer k geldt

$$s_{3k} = 3(s_{2k} - s_k).$$

15. Gegeven is de functie $f(x) = {}^a\log x$. Bewijs dat, als a en x positief zijn en $a \neq 1$ is, geldt

$$f(x) + f\left(\frac{a}{x}\right) = 1.$$

16. Benader met behulp van een logaritmentafel:
   a. de logaritme van 0,4 voor het grondtal 0,7;
   b. het grondtal waarvoor de logaritme van 0,4 gelijk is aan $-0,7$.

17. Van een meetkundige reeks is $t_1 = 1$ en $r = x^2-3x+1$.
   a. Voor welke waarden van x is de reeks convergent?
   b. Welke waarden kan de som aannemen?
   c. De som is een functie van x. Teken de grafiek van deze functie (met inachtneming van het onder a gevonden resultaat).

18. Los op:
   a. $1+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}+\ldots=\frac{2x-3}{x}$;
   b. $1+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}+\ldots=\frac{3x+2}{x}$;
   c. $1+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}+\ldots=\frac{x+1}{x}$.

19. Los op:
   a. ${}^2\log(x^2-x) \leqq 1$;
   b. ${}^{0,1}\log(x^2-6) \geqq -1$.

20. a. Bereken $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+x+x^2+\ldots+x^n}{1+x^2+x^4+\ldots+x^{2n}}$, als $|x| < 1$.
   b. Bereken deze limiet ook, als $x = 1$.
   c. Eveneens als $x > 1$.

21. Gegeven is de vergelijking

$$x^2-3x+a^2-4 = 0.$$

Voor de wortels geldt $x_1 \leqq x_2$. Welke waarden kan x_1 aannemen?

22. a. Teken in één figuur de grafieken van de functies x^2 en $|2x|$.
   b. Los nu de ongelijkheid $x^2 < |2x|$ op.

23. Van een reeks is gegeven

$$t_k = -k+7.$$

   a. Bereken s_k.
   b. Voor welke waarden van k is $|s_k| > 10$?

24. a. Voor welke gehele waarden van x geldt

$$10^5 < 2^x < 10^6?$$

b. Voor welke natuurlijke waarden van x is 2^x een getal van negen cijfers?

25. Van een reeks is gegeven

$$s_k = 2^{kp} - 1.$$

a. Bewijs dat de reeks meetkundig is.
b. Voor welke waarden van p convergeert de reeks?
c. Druk voor dat geval de som in p uit.

26. Gegeven is

$$f(x) = x + {}^g\log a^x \quad (a > 0).$$

Bewijs dat

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

27. Gegeven is de vergelijking

$$x^2 - 2ax - a + 6 = 0.$$

a. Voor welke waarden van a heeft deze vergelijking twee ongelijke wortels?
b. Voor welke waarden van a zijn deze wortels beide positief?

28. Van een reeks is gegeven

$$t_k = (-1)^{k+1}(-3)^{2k}.$$

a. Wat voor soort reeks is dit?
b. Druk s_k in k uit.

29. Gegeven is de functie

$$|x-3| + |x-5|.$$

a. Herleid de functie, als $x > 5$, als $3 \leqq x \leqq 5$ en als $x < 3$ is.
b. Teken de grafiek van de functie.

30. Van een meetkundige reeks is $t_1 = {}^2\log x$ en $t_2 = {}^2\log^2 x$.
a. Voor welke waarden van x convergeert de reeks?
b. Welke waarden kan de som aannemen?

31. Benader met behulp van een logaritmentafel de wortels van de volgende vergelijkingen:
a. $x^2 - x \log 3 = 1$;
b. $x^2 = \log^2 5 + \log^2 9$.

32. De getallen a, b en c vormen in deze volgorde een rekenkundige reeks.
   a. Bewijs dat de vergelijking

$$ax^2-2bx+c=0$$

   dan wortels heeft.
   b. Druk deze wortels in a en c uit.

33. Van een reeks is gegeven

$$t_k=2^k(x-2)^{-k}.$$

   a. Bewijs dat de reeks meetkundig is.
   b. Voor welke waarden van x convergeert de reeks?
   c. Druk de som s in x uit.
   d. Teken de grafiek van de in c gevonden functie (met inachtneming van het onder b gevonden resultaat).

34. Welke waarden kan de functie

$$2^x+2^{-x}$$

aannemen?

35. Bewijs dat er geen enkele waarde van p bestaat waarvoor de vergelijking

$$x^2-(10+2p)x+2p^2+10p=0$$

twee negatieve wortels heeft.

36. Gegeven is

$$y=2^x \quad \text{en} \quad z={}^2\log x.$$

   a. Voor welke waarde van z is $y=8$?
   b. Benader het gevonden antwoord met behulp van een logaritmentafel.
   c. Voor welke gehele waarden van z is $2<y<256$?

37. Van een reeks is gegeven

$$s_k+t_k=4.$$

   a. Bewijs dat de reeks meetkundig is.
   b. Voor welke waarden van k geldt $t_k<0{,}001$?

38. Voor welke waarden van a heeft de vergelijking

$$2^{2x}+a\,.\,2^x-a+3=0$$

twee verschillende wortels?

39. Van een meetkundige reeks is $t_1 = 1$ en $t_2 = {}^3\log \frac{1}{2}$.
a. Bewijs dat de reeks convergent is.
b. Voor welke waarden van k is $|s - s_k| < 10^{-3}$?

40. Voor welke waarden van a is

$$-x^2 + 2ax + a < 6$$

voor iedere waarde van x?

41. Gegeven is

$$f(x) = a + \frac{{}^g\log {}^g\log x}{{}^g\log b}.$$

Bewijs dat

$$f(x^b) = 1 + f(x).$$

42. Van een meetkundige reeks is $t_1 = 1$ en $r = x^2 - x + 1$.
a. Voor welke waarden van x is de reeks convergent?
b. Bereken de kleinste waarde die de som kan aannemen.

43. Gegeven is de vergelijking

$$x^2 - (2a-4)x + a = 0.$$

a. Welke waarden kan a aannemen, als de vergelijking twee wortels heeft?
b. Welke waarden kan $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ dus niet aannemen?

44. a. Teken in één figuur de grafieken van de functies

$$|x-2| \quad \text{en} \quad \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}.$$

b. Los nu de ongelijkheid $|x-2| < \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ op.

45. a. Bewijs dat voor alle positieve waarden van x en y geldt

$$\frac{{}^2\log x + {}^2\log y}{2} \leqq {}^2\log \frac{x+y}{2}.$$

b. Welke analoge ongelijkheid kan men bewijzen, als het grondtal 2 vervangen wordt door $\frac{1}{2}$?

46. Van een reeks is gegeven

$$t_k = k \,.\, \log^k 9.$$

a. Voor welke waarden van k is $t_{k+1} > t_k$?
b. Wat is het rangnummer van de grootste term van de reeks?

47. Gegeven is de vergelijking

$$x^2-ax=a+2.$$

a. Bewijs dat de vergelijking voor elke waarde van a twee wortels heeft.
b. Bereken het minimum van $|x_1-x_2|$.

48. Van een rekenkundige reeks is T_1 de som van het eerste tiental termen, T_2 de som van het tweede tiental termen, enz.
a. Bewijs dat de getallen $T_1, T_2, \ldots$ een rekenkundige reeks vormen.
b. Als voor de nieuwe reeks geldt $T_k = 60k-50$, bereken dan de k^{de} term van de oorspronkelijke reeks.

49. a. Aan welke voorwaarde moeten a en b voldoen, als

$$-x^2+ax+a+b$$

voor elke waarde van x negatief is?
b. Aan welke voorwaarde moet b voldoen, opdat er waarden van a zullen zijn die aan de gevonden voorwaarde voldoen?

50. Van een meetkundige reeks is $t_1 = 25$ en $r > 0$. Voor welke waarden van r is de elfde term de eerste term die groter is dan 12800?

51. Welke waarden kunnen de wortels van de vergelijking

$$\log^2 x-4 \log x-p^2-5 = 0$$

aannemen?

52. Gegeven zijn de vergelijkingen

$$2^x = 2+\sqrt{(25-p^2)} \quad \text{en} \quad 2^y = 4-\sqrt{(25-p^2)}.$$

Voor welke waarden van p heeft zowel de eerste als de tweede vergelijking minstens één wortel?

53. Van een reeks is gegeven

$$t_k = k^2 : 0{,}8^k.$$

a. Bereken de eerste zes termen van de reeks in één decimaal nauwkeurig.
b. Voor welke waarden van k is $t_{k+1} < t_k$?
c. Benader de grootste term van de reeks in één decimaal nauwkeurig.

54. Welke waarden kan de functie

$$f(x) = {}^2\log x - {}^2\log (x-1)$$

aannemen?

55. Gegeven is de vergelijking

$$(x^2+ax+2)(x^2-2ax+2a-5) = 0.$$

a. Bewijs dat deze vergelijking voor elke waarde van a minstens twee ongelijke wortels heeft.
b. Voor welke waarden van a heeft de vergelijking vier ongelijke wortels?
c. Voor welke gehele waarden van a heeft de vergelijking slechts twee ongelijke wortels?

56. Van een convergente meetkundige reeks met positieve termen is de som der termen kleiner dan 2 en de som van de kwadraten der termen groter dan 2. Welke waarden kan de reden van de reeks dan hebben?

57. a. Los op

$$\left|\frac{2x-5}{x+1}\right| < 3.$$

b. Licht de gevonden oplossing toe door middel van de grafiek van de functie in het linker lid.

58. a. Voor welke waarden van x heeft ${}^4\log {}^4\log x$ betekenis?
b. Bereken met behulp van een logaritmentafel ${}^4\log {}^4\log 10$.

59. Teken de grafiek van de functie

$$\sqrt{\frac{(x-2)^2}{x^2}}.$$

60. Van een rekenkundige reeks is $t_1 = 19$ en $v = -2$.
a. Bereken het maximum van s_k en de waarde van k waarvoor dit maximum aangenomen wordt.
b. Voor welke waarden van k is $s_k < 0$?

61. Voor welke waarden van a geldt voor elke waarde van x

$$(x^2+2a)^2 > (ax+3)^2?$$

62. a. Teken in één figuur de grafieken van de functies

$$4-x \text{ en } |x^2-2x-8|.$$

b. Los nu de ongelijkheid $4-x \geqq |x^2-2x-8|$ op.

63. Welke waarden kan $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ aannemen, als $x+y=1$?

64. Bereken $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{1+5+9+\ldots+(4n-3)}$.

65. a. Los op

$$5 < 2^{|x|} \leqq 8.$$

b. Benader de gevonden grenzen met behulp van een logaritmentafel.

66. Los op

$$\frac{4x-2}{x+3} = \left|\frac{4x-2}{x+3}\right|.$$

67. Van een meetkundige reeks is $r = x^2+x$.
a. Voor welke waarden van r zijn de termen afwisselend positief en negatief?
b. Voor welke waarden van x is de reeks convergent?
c. Voor welke waarde van x is elke term van de reeks gelijk aan de som van alle erop volgende termen?

68. Gegeven is de functie

$$f(x) = \frac{1}{x^2-x-2}.$$

a. Welke waarden kan de functie aannemen?
b. Voor welke waarden van x is $f(x) > -\frac{1}{2}$?
c. Teken de grafiek van de functie.

69. a. Bewijs dat het minimum van x^2+px+q voor geen enkel stel waarden van p en q groter is dan $p+q+1$.
b. Voor welke waarden van p en q is het minimum gelijk aan $p+q+1$?

70. Van een convergente meetkundige reeks is $t_1 = 1$ en $r = \sqrt[k]{0{,}9}$. We stellen een nieuwe reeks op met als termen

$$T_1 = t_1+t_2+t_3+\ldots,\quad T_2 = t_2+t_3+t_4+\ldots,$$
$$T_3 = t_3+t_4+t_5+\ldots,\quad \text{enz.}$$

a. Bewijs dat de nieuwe reeks meetkundig is en convergeert.
b. Voor welke waarden van k is de som van de nieuwe reeks groter dan 10^4?

INFINITESIMAALREKENING

Algemene opmerking.

Als gevraagd wordt de extreme waarden van een functie te berekenen, moet ook opgegeven worden, of de extreme waarde een maximum of een minimum en absoluut of relatief is. Bovendien moet men ook de waarden van x opgeven waarvoor de extreme waarden bereikt worden.

A. Differentiaalrekening.

Vraagstukken.

1. Gegeven is de functie

$$f(x) = -x^3+3x^2+9x.$$

a. Voor welke waarden van x is $f(x)$ stijgend; voor welke dalend?
b. Bereken de extreme waarden van $f(x)$.

2. Gegeven is de functie

$$f(x) = (x-1)^2(x+2).$$

a. Voor welke waarden van x is $f(x)$ stijgend; voor welke dalend?
b. Bereken de extreme waarden van $f(x)$.
c. Teken de grafiek van $f(x)$.

3. Bereken de extreme waarden van x^2y, als gegeven is, dat tussen x en y de betrekking $2x+y = 6$ bestaat.

4. De functie

$$f(x) = x+\frac{a}{x}$$

heeft een extreme waarde voor $x = 2$. Bereken a en de extreme waarden van $f(x)$.

5. Gegeven is de functie

$$f(x) = x^3-11x-7.$$

In welke punten van de grafiek maakt de raaklijn een hoek van 45° met de X-as?

6. Gegeven is de functie

$$f(x) = x^3 - 4x.$$

a. Teken de snijpunten van de grafiek van $f(x)$ met de X-as en de raaklijnen in deze snijpunten.
b. Teken de punten van de grafiek waarvoor $x = 1$ en $x = -1$, en de raaklijnen in deze punten.

7. Gegeven is de functie

$$f(x) = x + \sqrt{(6-x)}.$$

a. Voor welke waarde van x is $f(x) = 0$?
b. Bereken het maximum van $f(x)$.
c. Teken de grafiek van $f(x)$.

8. Als $y = \operatorname{tg} x$, y' de afgeleide van y naar x en y'' die van y' naar x voorstelt, dan is $y'' = 2yy'$. Bewijs dit.

9. Bewijs dat de functie

$$-x + \sqrt{(x^2+5)}$$

voor alle waarden van x dalend is.

10. Gegeven is de functie

$$f(x) = \tfrac{1}{4}x^4 - x^2 + 2.$$

a. Voor welke waarden van x is $f(x)$ stijgend; voor welke dalend?
b. Bereken de extreme waarden van $f(x)$.
c. Teken de grafiek van $f(x)$ voor $-2 \leqq x \leqq 2$.

11. Gegeven is de functie

$$f(x) = 3x - 2x^{\frac{3}{2}}.$$

a. Bereken de nulwaarden en het maximum van $f(x)$.
b. Teken de grafiek van $f(x)$ voor $0 \leqq x \leqq 4$.

12. Gegeven is de functie

$$f(x) = x^3 - 3x.$$

a. Teken de grafiek van $f(x)$ voor $-2 \leqq x \leqq 3$.
b. Welke waarden neemt $f(x)$ in dit interval:
voor drie verschillende waarden van x aan;
voor twee verschillende waarden van x aan;
voor slechts één enkele waarde van x aan?

13. Voor welke waarden van a is de functie

$$\frac{ax+1}{x+a}$$

stijgend voor elke waarde van x waarvoor de functie betekenis heeft?

14. Bereken de hoeken die de grafieken van x^2 en $\sqrt[3]{x^2}$ in elk van hun gemeenschappelijke punten met elkaar maken.

15. Voor welke waarden van a raakt de grafiek van de functie x^3-2x^2+x+a de X-as?

16. Gegeven is de functie

$$f(x) = x^4-4x^3+4x^2+1.$$

a. Welke waarden kan deze functie aannemen?
b. Welke van deze waarden worden aangenomen voor vier verschillende waarden van x?

17. Welke gehele rationale functie van x van de derde graad heeft een maximum 2 voor $x = -1$ en een minimum -2 voor $x = 1$?

18. a. Als $f(-x) = f(x)$ voor elke waarde van x, dan is $f'(-x) = -f'(x)$.
Bewijs dit.
b. Als $f(-x) = -f(x)$ voor elke waarde van x, dan is $f'(-x) = f'(x)$.
Bewijs dit.

19. Voor welke waarden van a is de functie

$$x^3-3a(x-1)^2$$

stijgend voor elke waarde van x?

20. a. Bewijs dat de grafieken van de functies

$$x^2+\tfrac{1}{4}, \quad \sqrt{(x-\tfrac{1}{4})} \quad \text{en} \quad x$$

elkaar in één punt raken.
b. Bewijs dat voor $\frac{1}{4} \leqq x < \frac{1}{2}$ de afgeleide van $x^2+\frac{1}{4}$ kleiner is dan die van $\sqrt{(x-\frac{1}{4})}$ en voor $x > \frac{1}{2}$ groter.
c. Leid hieruit af, dat voor elke waarde van x die $\geqq \frac{1}{4}$ is,

$$x^2+\tfrac{1}{4} \geqq \sqrt{(x-\tfrac{1}{4})}.$$

B. Integraalrekening.

21. Bereken:

a. $\int_3^4 \frac{1}{x^2}\,dx$; b. $\int_0^3 (x-2)^2\,dx$; c. $\int_0^{\frac{1}{4}\pi} 2\sin 2x\,dx$.

22. Los x op uit $\int_0^x t^2\,dt + \int_0^{x^2} \sqrt{t}\,dt = 8$.

23. a. Teken de grafiek van de functie $|x^2-x|$.

b. Bereken $\int_{-1}^{2} |x^2-x|\,dx$.

24. Bereken de extreme waarden van

$$\int_0^t x\,dx - \int_0^t \sqrt{x}\,dx \quad (t > 0).$$

25. Bereken de oppervlakte van de figuur die begrensd wordt door bogen van de grafieken van de functies $(x-2)^2$ en $\frac{1}{3}x(4-x)$.

26. Bereken de oppervlakte van de figuur die begrensd wordt door bogen van de grafieken van de functies x^3 en $\sqrt{x}$.

27. a. Teken de grafiek van de functie $\frac{4}{x^2}$.

b. Bereken de oppervlakte van de driehoek die gevormd wordt door de X-as en de beide raaklijnen aan de grafiek van deze functie die een hoek van 45° met de X-as maken.

28. Een lijn l, evenwijdig aan de X-as, snijdt de grafiek van de functie ax^2 in de punten A en B. De projecties van A en B op de X-as noemen we A′ en B′. Bewijs dat de verhouding van de oppervlakten van vierhoek AA′B′B en van de figuur begrensd door l en boog AB van de grafiek, onafhankelijk is van de keuze van l.

29. Bereken de inhoud van het lichaam dat ontstaat door wenteling van de ellips met vergelijking $2x^2+y^2 = 50$ om de X-as.

30. a. Bereken de oppervlakte van de figuur die begrensd wordt door de X-as en de boog van de grafiek van de functie $\sin x$ die behoort bij het interval $0 \leqq x \leqq \pi$.

b. Bereken de inhoud van het lichaam dat ontstaat door wenteling van deze boog om de X-as.

GONIOMETRIE

Algemene opmerkingen.

1. De hoeken zijn in radialen uitgedrukt.
2. Als het noodzakelijk is bij het oplossen van een vergelijking of een ongelijkheid een tafel te gebruiken, moet het antwoord in minuten nauwkeurig gegeven worden en is het niet noodzakelijk het tot radialen te herleiden.
3. Bij het beantwoorden van vragen over functies, het tekenen van grafieken en bij het oplossen van ongelijkheden mag men zich beperken tot die waarden van x waarvoor $0 \leqq x \leqq 2\pi$, tenzij anders is vermeld.
4. Van de goniometrische vergelijkingen moet men de algemene oplossing geven.

Vraagstukken.

1. Gegeven is de functie

$$(\sqrt{3}) \sin x + \cos x.$$

a. Bereken de maxima en de minima van de functie en de waarden van x waarvoor deze aangenomen worden.

b. Teken de grafiek van de functie.

c. Los op

$$(\sqrt{3}) \sin x + \cos x > 0.$$

2. a. Teken in één figuur de grafieken van de functies

$$\sin x \quad \text{en} \quad \cos 2x.$$

b. Los op

$$\sin x = \cos 2x.$$

c. Los op

$$\sin x < \cos 2x.$$

3. Voor welke waarden van x waarvoor $-\pi \leqq x \leqq \pi$, geldt

$$\sin (3x + \tfrac{1}{4}\pi) = -\tfrac{1}{2}\sqrt{2}?$$

4. a. Teken in één figuur de grafieken van de functies

$$2 \sin^2 x \quad \text{en} \quad \cos x.$$

b. Bereken het maximum van de functie

$$2 \sin^2 x - \cos x.$$

5. Gegeven is de functie

$$f(x) = \frac{3 \sin x}{2+\sin x}.$$

a. Voor welke waarden van x is $f(x)$ stijgend?
b. Bereken de maxima en de minima van $f(x)$.
c. Teken de grafiek van $f(x)$.

6. Los op

$$\frac{1}{2 \cos x-1} \leqq -2.$$

7. a. Voor welke waarden van x zijn $\sin x$ en $\cos 2x$ beide positief; voor welke beide negatief?
b. Voor welke waarden van x zijn $\sin x$ en $\cos 2x$ beide groter dan $\frac{1}{2}$?
c. Voor welke waarden van x zijn $|\sin x|$ en $|\cos 2x|$ beide groter dan $\frac{1}{2}$?

8. a. Gegeven is $\sin x = p$. Bereken $|\text{tg}\, x|$.
b. Bereken $|\text{tg}\, x|$ voor $\sin x = 0$, voor $\sin x = -\frac{3}{5}$ en voor $\sin x = \frac{1}{3}$.

9. Gegeven is de functie

$$f(x) = 2 \sin x+\cos 2x.$$

a. Voor welke waarden van x neemt $f(x)$ een extreme waarde aan?
b. Bereken de extreme waarden en vermeld van welke aard ze zijn.
c. Teken de grafiek van $f(x)$.

10. Los op

$$4 \sin^3 x > \sin x.$$

11. Bereken de cosinus van de hoek waaronder de grafieken van $\sin x$ en $\cos x$ elkaar snijden.

12. Gegeven is de functie

$$f(x) = \cos x-\sin x.$$

a. Voor welke waarden van x is $f(x)$ positief?
b. Bereken de maxima en de minima van $f(x)$.

13. a. Voor welke waarden van x is de functie

$$f(x)=\frac{\cos 2x}{\cos x}$$

gelijk aan 0; voor welke positief?

b. Voor welke waarden van x is de functie $f(x)$ stijgend?

14. Gegeven is, dat de functie

$$\cos(x+\alpha)+\cos x$$

voor elke waarde van x kleiner is dan 1. Verder is gegeven, dat $0 \leqq \alpha \leqq \pi$. Welke waarden kan α dan aannemen?

15. Gegeven is de functie

$$f(x) = 3\sin x+\cos 2x+1.$$

a. Voor welke waarden van x is $f(x)$ positief?
b. Bereken de maxima en de minima van $f(x)$ en de waarden van x waarvoor deze aangenomen worden.
c. Teken de grafiek van $f(x)$.

16. a. Bereken de maxima en de minima van de functie

$$\cos 2x+\cos x.$$

b. Voor welke waarden van a heeft de vergelijking

$$\cos 2x+\cos x = a$$

wortels?

17. Los op:

a. $\operatorname{tg} 2x = \cos x$;
b. $\dfrac{\operatorname{tg} x+1}{\operatorname{tg} x-1} = 3 \operatorname{tg} 2x.$

18. a. Welke waarden kan de functie

$$\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x+1}$$

aannemen, als $\frac{1}{4}\pi < x < \frac{3}{4}\pi$?

b. Welke waarden kan de functie

$$\frac{\sin x}{\sin x+1}$$

aannemen, als $\frac{1}{4}\pi < x < \frac{3}{4}\pi$?

19. Los op

$$\sin x - 3 \cos x > 0.$$

20. Gegeven is de functie

$$f(x) = \sin 2x + 2 \sin x.$$

a. Bereken de maxima en de minima van $f(x)$ en de waarden van x waarvoor deze aangenomen worden.
b. Teken de grafiek van $f(x)$.

21. Los op

$$\cos 2x < 2 \cos x.$$

22. Gegeven is de functie

$$f(x) = 2 \cos^2 x - \sin x + 1.$$

a. Los op $f(x) = 0.$
b. Los op $f(x) < 0.$

23. a. Bewijs dat de grafiek van de functie

$$1 - \cos x$$

de X-as raakt in het punt waarvan $x = 0$ is.
b. Teken de grafiek van de functie $1 - \cos x$.
c. Bereken de oppervlakte van de figuur die ingesloten wordt door de X-as en een boog van de grafiek tussen twee opvolgende raakpunten met de X-as.

24. a. Voor welke waarden van x is de functie

$$\sin x + \cos x - 1$$

positief?
b. Bewijs dat de functie

$$\sin x + \cos x + \tfrac{3}{2}$$

voor elke waarde van x positief is.

25. a. Los op

$$\sin 3x \geqq \cos x.$$

b. Bereken de hoek waaronder de grafieken van $\sin 3x$ en $\cos x$ elkaar snijden in het punt waarvan $x = \tfrac{1}{4}\pi$.

26. Voor een van de wortels van

$$a \sin x + \cos x = 1$$

geldt $\operatorname{tg} x = 2$. Bereken a.

27. a. Teken in één figuur de grafieken van de functies

$$\operatorname{tg} x \quad \text{en} \quad \sin 2x.$$

b. Los op

$$\operatorname{tg} x = \sin 2x.$$

c. Los op

$$\operatorname{tg} x > \sin 2x.$$

28. Los op

$$\sin x < \sin 2x < \cos x.$$

29. Gegeven is de functie

$$f(x) = \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}.$$

a. Bereken $f'(x)$.
b. Bewijs dat de functie $f(x)$ geen extreme waarden heeft.
c. Bereken de tangens van de hoek die de raaklijn aan de grafiek van $f(x)$ in het punt waarvan $x = 0$, met de X-as maakt. Bereken ook de tangenten van de hoeken die de raaklijnen in de punten waarvan $x = \frac{1}{4}\pi$ en $x = \frac{1}{2}\pi$, met de X-as maken.

30. Teken de grafiek van de functie

$$1 - |\cos x|.$$

31. Los op

$$1 - |\cos x| = \cos x.$$

32. a. Bereken de maxima en de minima van de functie

$$f(x) = (1 + \sin x)(1 + \cos x).$$

b. Teken de grafiek van $f(x)$.

33. a. Teken in één figuur de grafieken van

$$2 \sin^2 x \quad \text{en} \quad \sin x.$$

b. Bereken de oppervlakte van de figuur die door de bogen van deze grafieken die behoren bij $0 \leqq x \leqq \frac{1}{6}\pi$, ingesloten wordt.

34. a. Bewijs: als $\operatorname{tg} x > 2$, dan is $|\sin x| > \frac{2}{5}\sqrt{5}$.
b. Is het omgekeerde ook juist? Licht het antwoord toe.
c. Welke waarden kan $\cos x$ aannemen, als $\operatorname{tg} x > 2$?

35. a. Teken in één figuur de grafieken van de functies

$$\sin 2x \quad \text{en} \quad \sin x.$$

b. Los op

$$\sin 2x > \sin x.$$

36. a. Bereken de maxima en de minima van de functie

$$f(x) = 2\sin^2 x - 2\sin x - \tfrac{3}{2}.$$

b. Teken de grafiek van $f(x)$.

37. Gegeven is, dat

$$-2 < \operatorname{tg} x < -1,$$

waarin $0 \leqq x \leqq \pi$. Welke waarden kan $\operatorname{tg} 2x$ dan aannemen?

38. a. Voor welke waarden van x geldt

$$\sin(x+\alpha) = \sin x + \sin \alpha?$$

b. Voor welke waarden van x geldt

$$\sin(x+\alpha) = \cos x + \cos \alpha?$$

39. a. Los op

$$\tfrac{1}{2} < \sin 2x < \tfrac{1}{2}\sqrt{3}.$$

b. Los op

$$\tfrac{1}{2} < |\sin 2x| < \tfrac{1}{2}\sqrt{3}.$$

40. a. Teken in één figuur de grafieken van de functies

$$\sin x \quad \text{en} \quad \cos \tfrac{1}{2}x$$

in het interval $0 \leqq x \leqq \pi$.

b. Bereken de oppervlakte van de figuur die door bogen van deze grafieken ingesloten wordt.

41. a. Teken in één figuur de grafieken van de functies

$$\operatorname{tg} x \quad \text{en} \quad 2\sin \tfrac{1}{2}x.$$

b. Hoeveel punten hebben de grafieken van deze functies gemeen? Motiveer het antwoord.

42. a. Voor welke waarden van a heeft de vergelijking

$$\sin 2x + 2\cos 2x = a$$

wortels?

b. Los de vergelijking op voor $a = \sqrt{5}$.

43. a. Teken in één figuur de grafieken van de functies

$$\sin x \quad \text{en} \quad \cos 2x.$$

b. Welke waarden kan $\cos 2x$ aannemen, als $\sin x > \frac{1}{2}$?

44. Gegeven is de functie

$$f(x) = (3\sqrt{3}) \sin^2 x \cos x.$$

a. Bereken de maxima en de minima van $f(x)$.
b. Voor welke waarden van x is $f(x) < 0$?
c. Teken de grafiek van $f(x)$.

45. a. Los op

$$|1-2 \sin x| \leqq \tfrac{1}{3}.$$

b. Los op

$$1-|2 \sin x| \leqq \tfrac{1}{3}.$$

46. a. Teken de grafiek van de functie $\dfrac{1}{\cos^2 x}$ in het interval $0 \leqq x \leqq \frac{1}{2}\pi$.

b. Bewijs dat $\dfrac{d \operatorname{tg} x}{dx} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

c. Bereken de oppervlakte van de figuur die ingesloten wordt door de X-as, de loodlijnen op de X-as in de punten $x = 0$ en $x = \frac{1}{4}\pi$ en de grafiek van de functie $\dfrac{1}{\cos^2 x}$.

47. Los op

$$\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x} > 1.$$

48. Los op

$$4 \sin 2x > \frac{3}{1+\sin 2x}.$$

49. Gegeven is

$$1 \leqq \operatorname{tg} 2x \leqq \sqrt{3} \quad \text{en} \quad 0 \leqq x \leqq \pi.$$

Welke waarden kan $\operatorname{tg} x$ dan aannemen?

50. Bereken het maximum van de functie

$$27 \sin x + \operatorname{tg} x.$$

Is dit maximum absoluut of relatief?

STEREOMETRIE

A. Theorie van de scheve projectie

1. We nemen twee onderling loodrechte vlakken π_1 en π_2 aan, waarvan we ons het eerste horizontaal en het tweede verticaal denken; we kiezen het tweede als *tafereel* voor de uit te voeren scheve projectie. Achtereenvolgens zullen we nu bespreken:
   a. de scheve projectie op π_2 van in π_1 gelegen vlakke figuren;
   b. de scheve projectie op π_2 van op π_1 staande eenvoudige veelvlakken.

2. We leggen de projectierichting vast door van een punt P van π_1 de scheve projectie P′ op π_2 aan te geven (fig. 1).

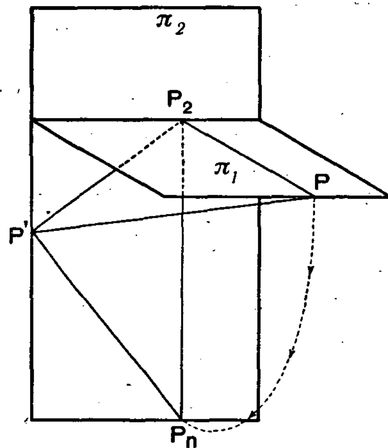


Fig. 1.

Wordt π_1 om de snijlijn van π_1 en π_2 (*as van projectie*) gewenteld tot in π_2, zoals in de figuur is aangegeven, dan komt P in een punt P_n van π_2. Is nu P_2 de *orthogonale projectie* van P op π_2, dan noemen we driehoek P_nP_2P' de *projectiedriehoek* van P.

Voor een bepaalde projectierichting zijn de bij twee willekeurige punten P en Q behorende projectiedriehoeken gelijkvormig.

In verband met deze eigenschap noemen we de projectiedriehoek van een willekeurig punt P van π_1 *de projectiedriehoek van de beschouwde scheve projectie.*

In fig. 2 is de projectiedriehoek opnieuw getekend.

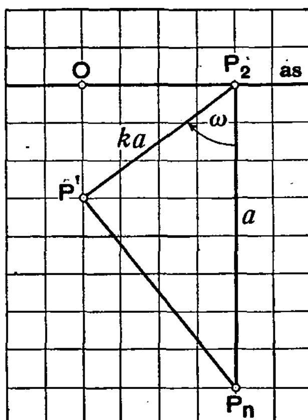


Fig. 2. Projectiedriehoek.

We noemen in deze figuur $\angle P_nP_2P'$ de *wijkhoek* ω *van de normaal op* π_2 en de verhouding $P'P_2 : P_nP_2$ de *verkortingsverhouding k voor de normaal*; ω kan alle waarden aannemen waarvoor geldt

$$-\pi < \omega \leqq \pi.$$

Voor negatieve waarden van ω komt de scheve projectie van P „rechts" van P_nP_2 te liggen [1]).

We kunnen de projectierichting op twee manieren aangeven:
a. door de waarden van ω en k;
b. door een toegevoegd puntenpaar (P, P').

Voor $\omega = 0$ en voor $\omega = \pi$ ontaardt de projectiedriehoek; in deze gevallen kruist de projectierichting de as van projectie loodrecht.

We geven de plaats van een punt P aan door drie getallen x, y en z, de coördinaten t.o.v. een rechthoekig assenstelsel met de X-as langs de as van projectie, de Y-as in het horizontale projectievlak en de Z-as in het tafereel.

In fig. 2 wordt P (4, 8, 0) geprojecteerd in P'(0, 0, —3); de notatie ervoor is $(4, 8, 0) \rightarrow (0, 0, -3)$.

Opgaven.

1. Bereken $\operatorname{tg}\omega$ en k, als de projectierichting bepaald wordt:
   a. door het punt (0, 0, —3) als projectie aan het punt (4, 8, 0) toe te voegen;

[1]) Er zijn leerboeken die onder de wijkhoek ω niet de door ons aangegeven hoek verstaan, maar het complement ervan.

b. door het punt (0, 0, —1) als projectie aan het punt (2, 4, 0) toe te voegen.

2. Bewijs dat voor $\omega = 60°$ en $k = \frac{1}{2}$ de projectiedriehoek rechthoekig wordt.

3. Bepaal de coördinaten van het punt P′ dat aan het punt P $(a, 2a, 0)$ is toegevoegd, indien $\omega = 45°$ en $k = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

4. Teken de projectiedriehoek voor $\operatorname{tg}\omega = 2$ en $k = \frac{1}{4}\sqrt{5}$, en bepaal de coördinaten van de scheve projectie van het punt (4, 8, 0).

Opmerking.

Wanneer we op papier tekenen met kwadratische liniëring, kiezen we soms irrationale verkortingsverhoudingen zoals in opgave 3 en in opgave 4 van deze paragraaf, om aan roosterpunten van het platte vlak weer roosterpunten als projectie te kunnen toevoegen. *Essentieel is het werken op gekwadrateerd papier echter niet.* Bij het werken op papier zonder kwadratische liniëring, dat voor de geoefende tekenaar geen bezwaar zal opleveren, verdient het aanbeveling voor k eenvoudige rationale waarden te kiezen.

3. Voorbeelden.

I. *De projectierichting is bepaald door wijkhoek en verkorting.*

a. In fig. 3 is een vierkant ABCD in π_1 getekend (bovenaanzicht) en daarnaast de scheve projectie ervan op π_2.

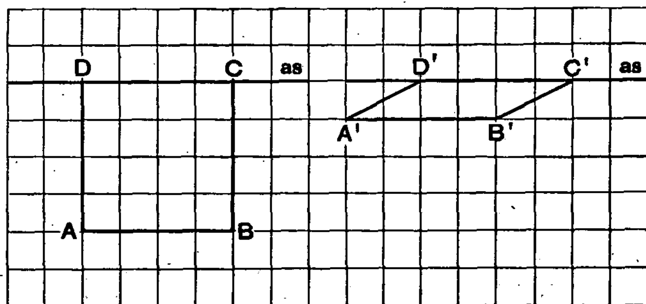


Fig. 3. Vierhoek in π_1; $\operatorname{tg}\omega = 2$; $k = \frac{1}{4}\sqrt{5}$.

b. In fig. 4 is een gelijkzijdige driehoek ABC in π_1, waarvan een zijde evenwijdig aan de as loopt, getekend (bovenaanzicht) en daarnaast de scheve projectie ervan op π_2.

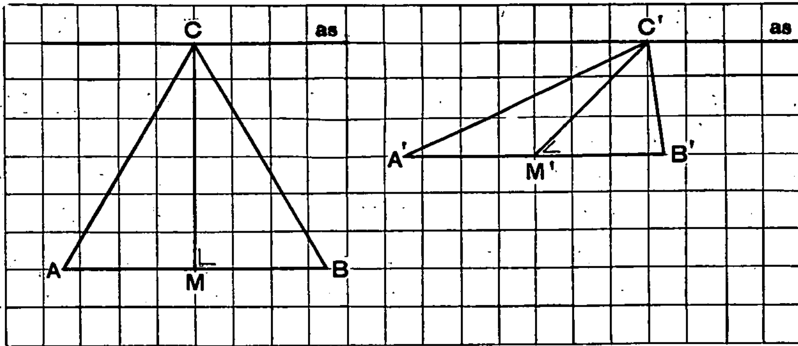


Fig. 4. Gelijkzijdige driehoek in π_1; AB evenwijdig aan de as; $\omega = 45°$; $k = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

c. In fig. 5 is een gelijkzijdige driehoek ABC in π_1, waarvan een zijde loodrecht op de as staat, getekend (bovenaanzicht) en daarnaast de scheve projectie ervan op π_2.

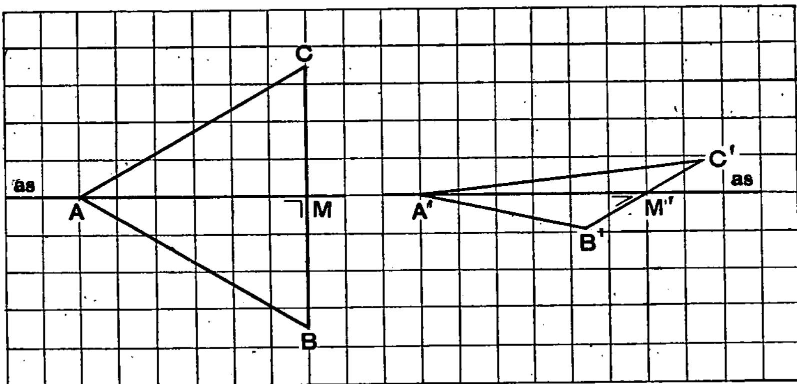


Fig. 5. Gelijkzijdige driehoek in π_1; BC loodrecht op de as; $\omega = 60°$; $k = \frac{1}{2}$.

Opmerking.

In de figuren 3—5 is de as van projectie getekend. Voldoende was geweest de richting van de as aan te geven, omdat evenwijdige verschuiving hier geen invloed heeft op de projectiefiguur.

II. *De projectierichting is bepaald door een toegevoegd puntenpaar.*

In fig. 6 is uitgegaan van een vierkant ABCD dat in π_1 ligt. In de figuur is de neerslag $A_nB_nC_nD_n$ in π_2 van dit vierkant getekend. De projectierichting is bepaald door aan het punt (2, 3, 0) van π_1 het punt (0, 0, —1) toe te voegen, hetgeen aanleiding geeft tot de projectiedriehoek P_nP_2P'. De hoekpunten van de scheve projectie A'B'C'D' zijn gevonden, door voor elk van de hoekpunten van ABCD de projectiedriehoek te construeren.

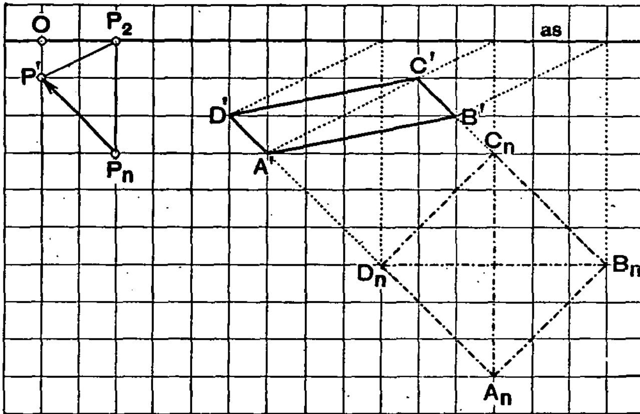


Fig. 6. Vierkant in π_1; projectierichting bepaald door P(2, 3, 0) → P'(0, 0, —1).

4. In fig. 7 zijn getekend:
 a. de neerslag $A_nB_nC_nD_n$ in π_2 van een in π_1 gelegen vierkant ABCD;
 b. de scheve projectie A'B'C'D' van dit vierkant.

Van de projectiedriehoeken van de punten A_n, B_n, C_n en D_n zijn alleen de zijden A_nA', B_nB', C_nC' en D_nD' in de figuur aangegeven.

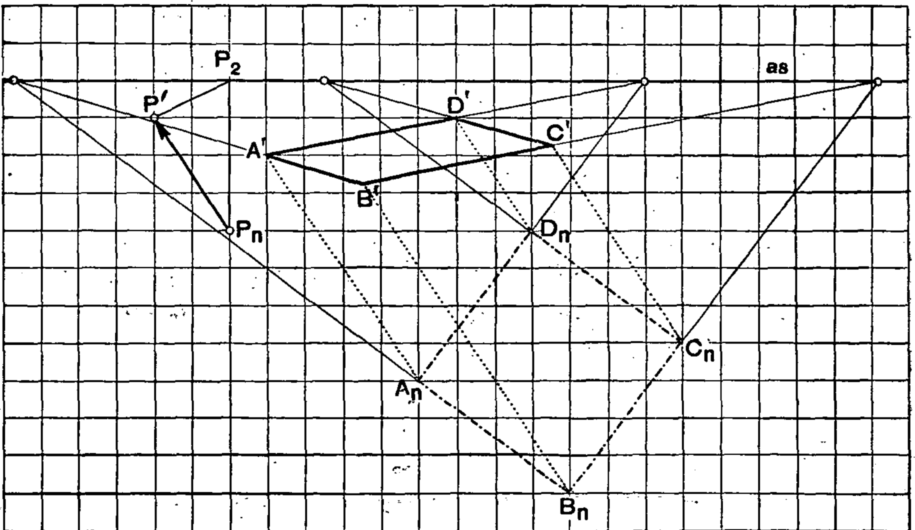


Fig. 7. Affiene verwantschap.

Gemakkelijk blijkt:
a. de scheve projectie van een in π_1 gelegen rechte die niet even-

wijdig is aan de as van projectie, snijdt de in π_2 neergeslagen rechte op de as van projectie;

b. de verbindingslijnen van neergeslagen punten met hun scheve projecties zijn evenwijdig.

De scheve projectie van een in π_1 gelegen figuur is dus *affien* verwant met de in π_2 neergeslagen figuur; de as van projectie is *affiniteitsas*, de gegeven richting P_nP' *affiniteitsrichting*.

Opmerking.

Als een lijn de as van projectie niet snijdt, zoals in fig. 6 de lijn D_nB_n, is ook de projectie D'B' evenwijdig aan de as van projectie.

5. De door scheve projectie af te beelden veelvlakken staan op π_1 en voor π_2; de omloopsrichting ABC . . . van het grondvlak is van boven gezien tegen de beweging van de wijzers van de klok in. Om het gedeeltelijk over elkaar vallen van de horizontale en de scheve projectie van het grondvlak te voorkomen moet de horizontale projectie „voldoende ver" vóór de as worden gekozen.

We beschouwen in het bijzonder de volgende standen:

a. die waarbij AB evenwijdig is aan de as van projectie;
b. die waarbij AC evenwijdig is aan de as van projectie.

We zullen deze standen opvolgend als stand I en stand II aangeven.

Bij de uit te voeren constructies maken we gebruik van de eigenschap, dat lijnstukken loodrecht op π_1 (en dus evenwijdig aan π_2) zonder richtingsverandering en in ware grootte (onverkort) op π_2 worden geprojecteerd.

6. Voorbeelden.

We laten in de volgende figuren de tot dusver gebruikte accenten in de scheve projectie weg.

a. In fig. 8 is een kubus ABCD-EFGH die op π_1 staat, getekend in stand I; tg $\omega = 3$; verkorting $\frac{1}{6}\sqrt{10}$.

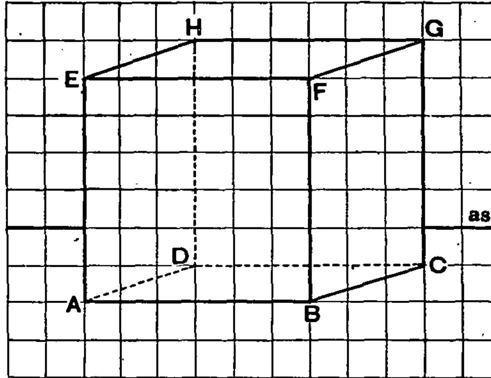


Fig. 8. Kubus, stand I; tg $\omega = 3$; $k = \frac{1}{6}\sqrt{10}$.

b. In fig. 9 is een kubus ABCD–EFGH die op π_1 staat, getekend in stand II; tg $\omega = 2$; verkorting $\frac{1}{4}\sqrt{5}$.

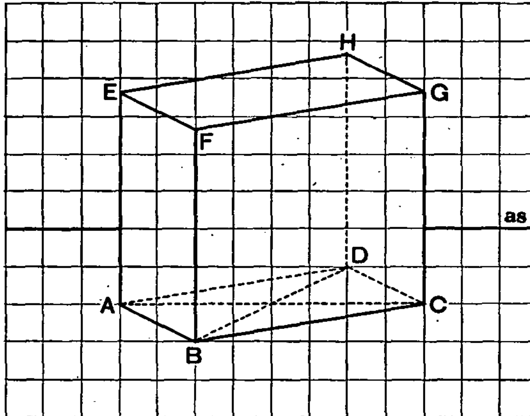


Fig. 9. Kubus, stand II; tg $\omega = 2$; $k = \frac{1}{4}\sqrt{5}$.

c. In fig. 10 is een piramide T.ABCD die op π_1 staat, getekend in stand I; wijkhoek 60°; verkorting $\frac{1}{2}$.

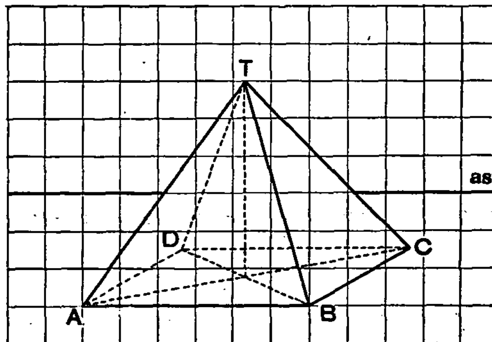


Fig. 10. Piramide, stand I; $\omega = 60°$; $k = \frac{1}{2}$.

d. In fig. 11 is een piramide T.ABCD die op π_1 staat, getekend in stand II; wijkhoek 60°, verkorting $\frac{1}{2}$.

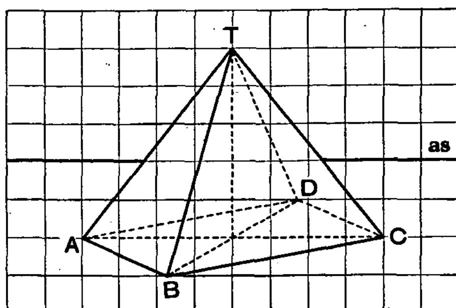


Fig. 11. Piramide, stand II; $\omega = 60°$; $k = \frac{1}{2}$.

7. We geven nog een tweetal voorbeelden van in scheve projectie uitgevoerde constructies, waarvan de eerste (fig. 12) zeer eenvoudig is en de tweede (fig. 13) iets moeilijker.

Opgave I.

De vierzijdige piramide T.ABCD staat op π_1 met AB evenwijdig aan de as en DC dichter bij de as dan AB. Het grondvlak is een vierkant met een zijde van 8 cm. Zijvlak TAD is een loodrecht op het grondvlak staande gelijkzijdige driehoek.

a. Construeer de piramide in scheve projectie met $\operatorname{tg} \omega = 2$ en $k = \frac{1}{4}\sqrt{5}$.

b. Construeer in de scheve projectie van de piramide de lijn PQ die met TC en AB rechte hoeken maakt.

Toelichting bij de in fig. 12 uitgevoerde constructie.

1. ABCD is geconstrueerd als in voorbeeld a van § 3.
2. De hoogtelijn uit T op ABCD komt in het midden van AD terecht; ze is evenwijdig aan het tafereel en wordt dus zonder richtingsverandering en onverkort geprojecteerd.
3. Omdat AB loodrecht op vlak TAD staat, is punt A de projectie van AB op vlak TAD; TD is de projectie van TC op vlak TAD. De projectie van PQ op vlak TAD is dus de hoogtelijn uit A op TD in $\triangle$ TAD; omdat deze driehoek gelijkzijdig is, is deze hoogtelijn tevens zwaartelijn (AM).
4. Q wordt gevonden door MQ//DC te trekken, P door QP//MA te trekken.

Opmerking.

Als men op papier wil tekenen zonder kwadratische liniëring, neme men voor wijkhoek en verkorting 60° en $\frac{1}{2}$.

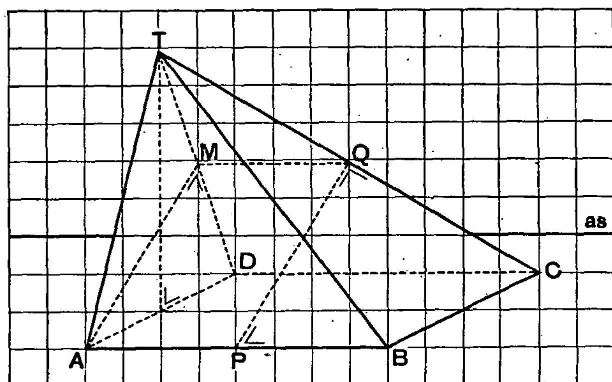


Fig. 12.

Opgave II.

De kubus ABCD—EFGH staat op π_1; de ribbe is 10 cm; de coördinaten van A en B zijn opvolgend (9, 17, 0) en (17, 23, 0). De projectierichting wordt gegeven door (2, 3, 0) → (1, 0, —1). K, M en N zijn opvolgend de middens van de ribben HG, BC en DC.

a. Construeer de scheve projectie van de kubus.

b. Construeer Q op HD en R op EM zó, dat QR met HD en EM rechte hoeken maakt.

c. Construeer het raakpunt L van EM met de cilinder die KN als as heeft en EM raakt.

Toelichting bij de constructie van fig. 13.

1. Voor de constructie van het grondvlak ABCD vergelijke men de in fig. 6 en fig. 7 uitgevoerde constructies.

2. De projectie ASD van de rechte hoek ERQ op ABCD is weer een rechte hoek. In de neergeslagen orthogonale projectie $A_nB_nC_nD_n$ van het grondvlak wordt eerst punt S_n geconstrueerd. Daarna wordt de scheve projectie S gevonden en RQ//SD getrokken.

3. De projectie van EM op ABCD raakt de cirkel volgens welke de cilinder vlak ABCD snijdt; N is het middelpunt van deze

cirkel. De projectie T van L op ABCD is het voetpunt van de loodlijn uit N op EM neergelaten.
(De constructies van T en L zijn uitgevoerd onafhankelijk van de constructies onder b.)

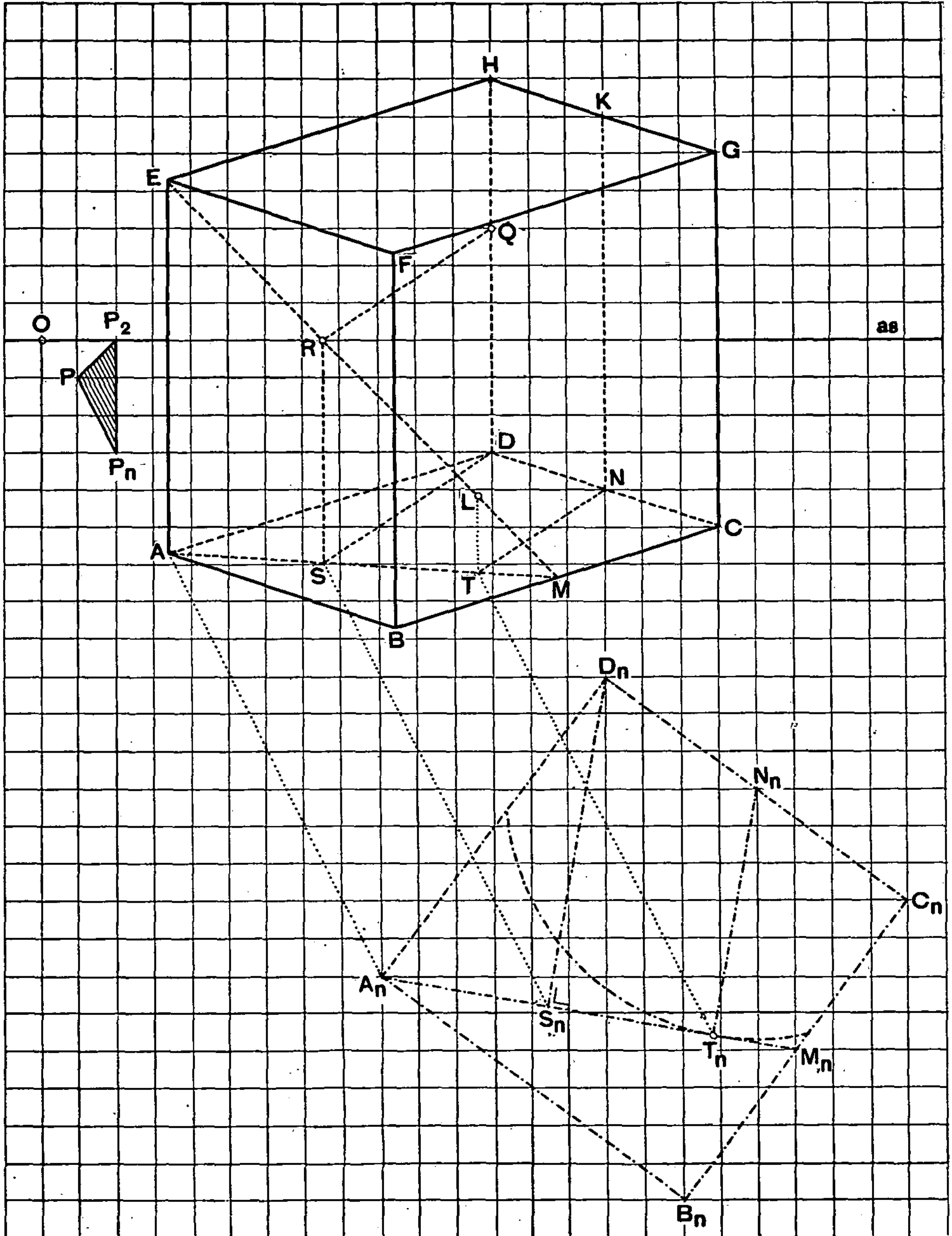


Fig. 13.

B. Vraagstukken

Algemene opmerkingen.

a. Als bij een vraagstuk over een veelvlak geen stand en projectierichting gegeven zijn, moet men deze gegevens zelf kiezen en bij de figuur vermelden.
b. Bij vraagstukken die uitsluitend betrekking hebben op omwentelingslichamen, kan men volstaan met het tekenen van een asdoorsnede.
c. Voor de betekenis van de in de aanwijzingen bij de vraagstukken voorkomende uitdrukkingen „stand I" en „stand II", van de letters ω en k en van een notatie als $(2, 4, 0) \rightarrow (0, 0, -1)$ wordt verwezen naar de onder A opgenomen theorie van de scheve projectie.

1. Gegeven is de kubus ABCD–EFGH; $AB = p$; P en Q zijn opvolgend de middelpunten van de zijvlakken ABCD en EFGH.
   a. Construeer het veelvlak dat de beide vierzijdige piramiden P.EFGH en Q.ABCD gemeen hebben.
   b. Druk de oppervlakte en de inhoud van het in a genoemde veelvlak in p uit.

2. Gegeven is het rechthoekig blok ABCD–EFGH; $AB = AD = p$; $AE = p\sqrt{3}$.
   a. Construeer op EC het punt P en op HF het punt Q zó, dat PQ evenwijdig is aan BG.
   b. Bereken de verhouding waarin P het lijnstuk EC verdeelt; bereken de verhouding waarin Q het lijnstuk HF verdeelt.
   c. Druk de lengte van PQ in p uit.

   Aanwijzing. Neem $p = 6$ cm; stand I; $(2, 4, 0) \rightarrow (0, 0, -1)$.

3. Gegeven is de kubus ABCD–EFGH; $AB = p$.
   a. Construeer de raaklijn x in E aan de bol door E, B, C en D die met de ribbe CG in één vlak ligt.
   b. S is het snijpunt van x met het raakvlak in G aan die bol. Druk de lengte van SG in p uit.

   Aanwijzing. Neem $p = 4\sqrt{2}$ cm; stand II; $(3, 4, 0) \rightarrow (0, 0, -1)$.

4. De grond- en bovencirkel van een cilinder zijn cirkels op een bol met straal R; de hoogte van de cilinder is x.
   a. Druk de inhoud I van de cilinder in R en x uit.
   b. Bereken voor veranderlijke x de maximale waarde van I.

5. Gegeven is de kegel met top T en grondcirkel (M, r); op deze cirkel liggen de punten A en B zó, dat $\angle$ AMB = 90°. Op TA ligt punt C zó, dat TC : CA = 1 : 3, en op TB punt D zó, dat TD = DB.
   a. Construeer het snijpunt S van CD met het vlak door T evenwijdig aan het grondvlak van de kegel.
   b. Druk de lengte van ST in de straal r van de grondcirkel uit.
   c. Construeer het punt P in het vlak van de grondcirkel dat zó is gelegen, dat PC en PD de kegel raken.

   Aanwijzing. Neem vlak TMB // tafereel, B rechts van M, en A verder van het tafereel af dan M; $r = 4$ cm; TM $\doteq$ 6 cm; $\omega = 45°$; $k = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

6. Gegeven is de kubus ABCD–EFGH; AB = p.
   a. Construeer het veelvlak dat de middelpunten van de zijvlakken als hoekpunten heeft.
   b. Bewijs dat dit veelvlak een regelmatig veelvlak is.
   c. Druk de inhoud van dit veelvlak in p uit.

   Aanwijzing. Neem p = 8 cm; stand I; (3, 8, 0) → (0, 0, −2).

7. In een bol met straal R worden kegels beschreven waarvan de toppen en de grondcirkels op de bol liggen.
   Bereken de grootste waarde die de inhoud van zo'n ingeschreven kegel kan bereiken.

8. Gegeven is de kubus ABCD–EFGH; AB = p.
   a. Bewijs dat de vlakken DBF en ACH loodrecht op elkaar staan.
   b. Construeer de projecties van EF op de vlakken DBF en ACH.
   c. Druk de lengten van deze projecties in p uit.
   d. Bereken de cosinussen van de hoeken die EF met de vlakken DBF en ACH maakt.

   Aanwijzing. Neem AB = 8 cm; (3, 8, 0) → (0, 0, −2).

9. Gegeven is de kubus ABCD–EFGH; AB = p.
   a. Bewijs dat DF loodrecht op vlak BEG staat.
   b. Construeer door het midden M van AE de lijn x die CF snijdt en DF loodrecht kruist.
   c. S is het snijpunt van x en CF.
      Druk de lengte van MS in p uit.

10. Gegeven is de regelmatige vierzijdige piramide T.ABCD; $AB = p\sqrt{2}$; $TA = 2p$.
   a. Bewijs dat TBD deelvlak is van de standhoek op TB.
   b. Bewijs dat AC en TB elkaar loodrecht kruisen.
   c. Construeer P op AC en Q op TB zó, dat PQ met AC en met TB rechte hoeken maakt.
   d. Druk de lengte van PQ in p uit.
   e. Construeer de punten A′, B′, C′ en D′ waarin de opstaande ribben van de piramide gesneden worden door de bol die door T gaat en het grondvlak van de piramide in zijn middelpunt raakt.
   f. Bereken de verhouding van de stukken waarin A′ de ribbe TA verdeelt.

   Aanwijzing. Neem $p = 4$ cm; stand II; $\omega = 45°$; $k = \frac{1}{2}$.

11. Gegeven is een viervlak ABCD waarin elke ribbe even lang is als zijn overstaande ribben; P, Q, R en S zijn opvolgend de middens van de ribben AB, BC, CD en DA.
   a. Bewijs dat PQRS een ruit is.
   b. Bewijs dat PR de loodrechte snijlijn van AB en CD is.
   c. Bewijs dat de hoogtelijnen van het viervlak gelijk zijn.

12. Gegeven is de kubus ABCD–EFGH; $AB = p$.
   a. Construeer door E een lijn x die de lijn BC op een afstand $\frac{1}{2}p$ kruist en de ribbe CG snijdt.
   b. Construeer het lijnstuk PQ (P op de lijn BC en Q op de lijn x) dat met BC en met x rechte hoeken maakt.

   Aanwijzing. Neem $p = 6$ cm; stand I; $\omega = 45°$; $k = \frac{1}{3}\sqrt{2}$.

13. Gegeven is het viervlak D.ABC; $AB = 3a$; $BC = 4a$; $AC = 5a$; de hoogtelijn $DD' = 2\frac{1}{2}a$; D′ verdeelt BC zó, dat $BD' : D'C = 5 : 3$.
   a. Bewijs dat de vlakken ABD en BCD loodrecht op elkaar staan.
   b. Construeer de projecties p en q van AD op de vlakken DBC en ABC, en de projecties k en l van AC op DBC en ABD.

   Aanwijzing. Neem $a = 2$ cm; stand I; $(3, 4, 0) \rightarrow (0, 0, -1)$.

14. a. Construeer in het viervlak uit opgave 13 op AD het punt E zó, dat $EB = BC$.
   b. Bereken de verhouding van de inhouden van de delen waarin vlak EBC viervlak ABCD verdeelt.

15. a. Construeer de doorsnede van het viervlak uit opgave 13 met het middelloodvlak van BD.
b. Druk de oppervlakte van deze doorsnede in a uit.
c. Bereken de tangens van de standhoek op de ribbe AC van het viervlak.
d. Construeer de standhoek op de ribbe CD in ware grootte.

16. Gegeven is de kubus ABCD–EFGH; AB = p.
a. Construeer het lijnstuk PQ (P op AH en Q op DG) zó, dat PQ met AH en met DG rechte hoeken maakt.
b. Druk de lengte van PQ in p uit.
Aanwijzing. Neem $p = 8$ cm; teken DH 3 cm rechts van AE en DC 2 cm boven AB; bereken nu welke waarden van tg ω en van k bij deze figuur behoren.

17. Gegeven is de kubus ABCD–EFGH; AB = p.
a. Construeer het middelpunt van de bol die door A, B en C gaat en vlak EFGH raakt.
b. Druk de straal r van deze bol in p uit.
c. Deze bol snijdt de ribbe CG behalve in C nog in een punt S.
Druk de lengte van CS in p uit.
d. Construeer de doorsnede van de kubus met het raakvlak in S aan de genoemde bol.
e. Druk de oppervlakte van deze doorsnede in p uit.
Aanwijzing. Neem $p = 6\sqrt{2}$ cm; stand II; $\omega = 45°$; $k = \frac{1}{2}$.

18. Gegeven is het rechte blok ABCD–EFGH; AB = $2p$; BC=p; AE = $p\sqrt{6}$; $\angle$ BAD = 60°.
a. Construeer het middelpunt M en bereken de straal van de bol die door A, B en D gaat en BF raakt.
b. Druk de lengten van de stukken DS en SF waarin DF door die bol verdeeld wordt, in p uit.
c. Bewijs dat H, S en het midden van AC op een rechte lijn liggen.
Aanwijzing. Neem $p = 3$ cm; stand I; (2, 3, 0) → (0, 0, —1).

19. Gegeven is de kubus ABCD–EFGH; AB = p.
a. Construeer het middelpunt M van de bol door A, B, E en G en druk de straal r van deze bol in p uit.
b. Construeer door G de raaklijn l aan de bol die in vlak ACG ligt en druk de afstand van G tot het snijpunt van l met ABCD in p uit.

20. Van een kegel is de asdoorsnede een gelijkzijdige driehoek met zijde $2p$. Van een cilinder is de grondcirkel concentrisch met die van de kegel; de bovencirkel ligt op de kegelmantel; de straal van grond- en bovencirkel is x.
a. Druk de inhoud I van de cilinder in p en x uit.
b. Bereken het maximum van I bij veranderlijke x.

21. Gegeven is de piramide T.ABCD; ABCD is een vierkant met zijde $2p$; TD staat loodrecht op ABCD; TD $= p\sqrt{3}$.
a. Construeer het kleinste lijnstuk PQ (P op DC en Q op TB) dat DC en TB verbindt.
b. Druk de lengte van PQ in p uit.
c. Construeer het kleinste lijnstuk RS (R op AB en S op TC) dat AB en TC verbindt.
d. Druk de afstand van PQ en RS in p uit.
Aanwijzing. Neem $p = 3$ cm; stand I; $(1, 4, 0) \rightarrow (0, 0, -1)$.

22. a. Bewijs voor de piramide uit opgave 21, dat vlak TBC loodrecht staat op vlak TDC.
b. Bereken de sinus van de hoek die AB met vlak TBC maakt.
c. Bereken de tangens van de hoek tussen de vlakken TBC en TAD.

23. a. Construeer in de piramide uit opgave 21 het middelpunt M van de bol die gaat door B, C en het snijpunt van AC en BD, en het vlak ADT raakt.
b. Construeer het raakpunt N van de in a genoemde bol met vlak ADT.
c. Construeer het middelpunt Q van de cirkel volgens welke deze bol het vlak TCD snijdt.
d. Druk de straal r van de in c genoemde cirkel in p uit.

24. a. Construeer de doorsnede van de piramide uit opgave 21 met het middelloodvlak van BC.
b. Druk de oppervlakte van die doorsnede in p uit.

25. a. Een cilindervlak met as AD raakt het zijvlak TBC van de piramide uit opgave 21.
Construeer de lijn volgens welke dit cilindervlak vlak TBC raakt.
b. Druk de straal van dit cilindervlak in p uit.

26. Gegeven is het viervlak ABCD; driehoek ABC is rechthoekig in B; BC = p; AC = $2p$; de hoogtelijn uit D is even lang als BC; de opstaande ribben AD, BD en CD maken gelijke hoeken met het grondvlak.
   a. Bewijs dat D en de omgeschreven cirkel van driehoek ABC top en grondcirkel van een kegel zijn.
   b. Druk de inhoud van deze kegel in p uit.
   c. Construeer de scheve projectie van het viervlak voor $p = 5$ cm, stand I en $(2, 3, 0) \rightarrow (0, 0, -1)$.
   d. Construeer de hoogtelijnen uit B en uit D.
   e. Druk de afstand van deze hoogtelijnen in p uit.

27. Gegeven is het viervlak ABCD; AB = 8 cm; BC = 5 cm; $\angle$ ABC = 60°; de opstaande ribben AD, BD en CD maken gelijke hoeken met het grondvlak; het middelpunt van de omgeschreven bol ligt in het grondvlak.
Bereken de straal van de omgeschreven bol van het viervlak en de hoeken die de opstaande ribben met het grondvlak maken.

28. Van een cilinder zijn M en N opvolgend de middelpunten van grond- en bovencirkel. Op de omtrek van de grondcirkel is een punt P gegeven.
   a. Neem op de omtrek van de bovencirkel een punt Q zó aan, dat PQ niet evenwijdig is aan MN en construeer op PQ een punt A en op MN een punt B zó, dat AB met PQ en MN rechte hoeken maakt.
   b. In welke verhouding worden PQ en MN opvolgend door A en B verdeeld?
   c. Bepaal de meetkundige plaats van A, als Q de omtrek van de bovencirkel doorloopt.
   d. Druk de straal van de omgeschreven bol van het viervlak MNPQ in de straal r van de grondcirkel uit, als bovendien gegeven is dat MN en PQ elkaar loodrecht kruisen en dat MN = $2r$.
   e. Druk de inhoud van het viervlak MNPQ in r uit.

Aanwijzing. Neem PM $\perp$ tafereel, P verder van het tafereel dan M; $r = 4$ cm; $\omega = 45°$; $k = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

29. Gegeven is de kubus ABCD–EFGH; AB = p; P ligt op AH zó, dat AP : PH = 1 : 2; Q ligt op DF zó, dat DQ : QF = = 3 : 1; S is het snijpunt van BG en FC.
Druk de lengten van de zijden van driehoek PQS in p uit.

30. Gegeven is het rechthoekig blok ABCD–EFGH; AB = = AD = p; AE = $p\sqrt{3}$.
   a. Construeer de doorsnede van het blok met het vlak α door AB en het punt N van EC waarvoor geldt, dat EN : NC = 2 : 1.
   b. Bewijs dat de doorsnede een rechthoek is.
   c. Bereken de verhouding van de inhouden van de delen waarin het vlak α het blok verdeelt.

   Aanwijzing. Neem p = 6 cm; stand I; $\omega = 60°$; $k = \frac{1}{2}$.

31. a. Bewijs voor het blok uit opgave 30, dat de vlakken ACH en BEG evenwijdig zijn en loodrecht staan op vlak DBF.
   b. Bereken de verhouding van de lengten van de stukken waarin de vlakken ACH en BEG de diagonaal DF verdelen.
   c. Bereken de verhouding van de inhouden van de delen waarin de vlakken ACH en BEG het blok verdelen.

32. a. Bewijs dat de ingeschreven cirkel van EFGH en de omgeschreven cirkel van ABCD van het blok uit opgave 30 op één bol liggen.
   b. Construeer het middelpunt M en de straal r van deze bol.

33. a. Construeer in het blok uit opgave 30 de lijn x die AB en CE loodrecht snijdt.
   b. Druk de afstand van AB en CE in p uit.
   c. Bereken de sinus van de hoek gevormd door de lijnen AB en CE.

34. Gegeven is het rechte, driezijdige prisma ABC–DEF; driehoek ABC is gelijkzijdig; AB = $2p$; AD = $p\sqrt{2}$; K is het midden van AB; L is het midden van EF.
   a. Druk de inhoud van het viervlak CDEK in p uit.
   b. Bewijs dat AE de lijn DK loodrecht snijdt en de lijn DC loodrecht kruist.
   c. Bewijs dat DC en KL elkaar loodrecht kruisen.

35. Gegeven is de regelmatige, vierzijdige piramide T.ABCD; AB = $p\sqrt{2}$; TA = $2p$.
   a. Construeer de doorsnede van de piramide met het loodvlak α door C op TA.
   b. Druk de inhoud van het deel van de piramide dat aan dezelfde kant van α ligt als T, in p uit.

   Aanwijzing. Neem p = 6 cm; $\omega = 45°$; $k = \frac{1}{4}\sqrt{2}$.

36. Gegeven is de vierzijdige piramide uit opgave 35. S is het snijpunt van AC en BD.

a. Construeer de snijpunten A′, B′, C′ en D′ van de ribben TA, TB, TC en TD met de bol die TS als middellijn heeft.
b. Druk de lengten van de delen waarin de opstaande ribben door de bol verdeeld worden, in p uit.
c. Construeer de doorsnede van de piramide met het raakvlak β in A′ aan de in a genoemde bol.
d. Druk de inhoud van het viervlak dat β van de piramide afsnijdt, in p uit.

37. Gegeven is het viervlak OABC, rechthoekig in O; OA = = OB = $4p$; OC = $2p$.

a. Construeer de projectie O′ van O op vlak ABC.
b. Bewijs dat O′ hoogtepunt is van driehoek ABC.
c. Construeer het middelpunt M van de omgeschreven bol van het viervlak.
d. Druk de lengte van het lijnstuk MO′ in p uit.

Aanwijzing. Neem $p = 3$ cm; driehoek OAB in het horizontale vlak; driehoek COB // tafereel; A verder van het tafereel dan B; $\omega = 45°$; $k = \frac{1}{3}\sqrt{2}$.

38. Gegeven is de kubus ABCD–EFGH; Q is het midden van DH; AB = p.

a. Construeer de doorsnede van de kubus met het vlak α door Q loodrecht op QF.
b. Druk de inhouden van de delen waarin α de kubus verdeelt, in p uit.

39. Gegeven is de kubus ABCD–EFGH; AB = p; S is het midden van BG.

a. Construeer het middelpunt M van de bol door B, C, D en S.
b. Druk de lengte van het deel van AG dat binnen de bol ligt, in p uit.
c. Bewijs dat de raakvlakken in S en C aan de bol elkaar onder een hoek van 60° snijden.

40. Gegeven zijn de kegel met top N en grondcirkel (M, r) en de kegel met top M en grondcirkel (N, $2r$); de gemeenschappelijke hoogte MN van de kegels is gelijk aan $3r$.
Druk de inhoud van het deel van de ene kegel dat binnen de andere ligt, in r uit.

41. Gegeven is de kegel met top T en grondcirkel (M, r); de halve tophoek van de kegel is 30°. Een lijn l door T snijdt het vlak α van de grondcirkel in A onder een hoek van 30°. De raakvlakken β en γ door l aan de kegel gaan opvolgend door de punten B en C van de grondcirkel.
a. Bereken de hoek die β en γ met α maken.
b. Bewijs dat vlak (M, l) de hoek tussen β en γ middendoordeelt.
c. Bereken de hoek die β en γ met elkaar maken.

42. Gegeven is de kegel met top T en grondcirkel (M, r); de halve tophoek is 30°. Op de grondcirkel liggen de drie punten A, P en B zó, dat bg AP = bg PB = 90°; Q is het midden van TA.
a. Druk de lengte van PQ in r uit.
b. Druk de afstand van PQ en TM in r uit.

43. Gegeven is de kubus ABCD–EFGH; M is het midden van de ribbe BC.
a. Construeer de hoek φ gevormd door de lijnen AM en DG. Bereken de sinus van deze hoek.
b. Construeer de hoek ψ gevormd door de lijn HM en het vlak BCG. Bereken de sinus van deze hoek.
c. Construeer de hoek χ gevormd door de vlakken AMG en ABC. Bereken de sinus van deze hoek.

44. Gegeven is de kubus ABCD–EFGH; $AB = p$; K is het midden van de ribbe CG; M en N zijn de middens van de ribben FG en HG.
a. Bewijs dat de lijnen BD en AK elkaar loodrecht kruisen.
b. Druk de afstand van BD en AK in p uit.
c. Bewijs dat het vlak door C loodrecht op AK aangebracht door M en N gaat.
d. Druk de inhoud van het viervlak ACMN in p uit.
Aanwijzing. Neem $p = 4\sqrt{2}$ cm; stand II; $\operatorname{tg} \omega = \frac{1}{2}$; $k = \frac{1}{4}\sqrt{5}$.

45. De lijnen p, l en m vallen langs de ribben AE, EH en AB van een balk ABCD–EFGH.
Op l ligt een punt P en op m een punt Q zó, dat $EP = AQ = a$; $AE = b$.
Bewijs dat A en E op de bol liggen met PQ als middellijn en bepaal de meetkundige plaats van het middelpunt van die bol bij veranderlijke a.

46. De lijnen p, l en m vallen langs de ribben AE, EH en AB van een balk ABCD–EFGH; AE $= a$.
Op l ligt een punt P en op m een punt Q zó, dat PQ $= 2a$. Bewijs dat voor veranderlijke P en Q de meetkundige plaats van het middelpunt van de bol door A, E, P en Q een cirkel is en druk de straal van deze cirkel in a uit.

47. Gegeven is de kegel met top T en grondcirkel (M, r); de halve tophoek is 45°. In het vlak α van de grondcirkel ligt een punt P zó, dat PM $= 2r$, en op de cirkel een punt A zó, dat $\angle$ PMA $= 90°$.
a. Construeer het punt Q op TA zó, dat de afstand van PQ en TM gelijk is aan $\frac{2}{5}r$.
b. Bereken de verhouding TA : TQ.
Aanwijzing. Neem vlak TMP // tafereel, P links van M en A verder van het tafereel dan M; $r = 4$ cm; (3, 4, 0) $\rightarrow$ (0, 0, -2).

48. Gegeven is de kegel uit opgave 47.
a. Neem op TA een willekeurig punt K aan en construeer het tweede snijpunt S van de lijn KP met de kegelmantel.
b. Bepaal de meetkundige plaats van S, als K het lijnstuk TA doorloopt.
c. Construeer K op TA zó, dat PS : PK $= 3 : 4$.

49. Gegeven is de kegel uit opgave 47.
a. Bewijs dat de meetkundige plaats van de projectie N van M op PK een cirkelboog is, als K het lijnstuk TA doorloopt.
b. Druk de straal van deze cirkelboog in r uit.

50. Gegeven is de kegel uit opgave 47.
a. Construeer door het midden L van TA een raaklijn t aan de kegel die het vlak α van de grondcirkel onder een hoek van 30° snijdt.
b. Bereken de hoek waaronder t en TA elkaar snijden.

ANALYTISCHE MEETKUNDE

Algemene opmerkingen.

1. Bij alle opgaven is ondersteld, dat het coördinatenstelsel een rechthoekig assenstelsel XOY is; met O is dus steeds de oorsprong van het stelsel bedoeld.
2. Bij de vraagstukken over meetkundige plaatsen moet opgegeven worden van welke aard de gevonden kromme is. Bovendien moet vermeld worden, hoe de ligging van deze kromme is.

Vraagstukken.

1. Op de lijn $x = -p$ kiest men een punt P; de poollijn van P t.o.v. de parabool $y^2 = 2px$ snijdt de lijn PO in S. Bepaal de meetkundige plaats van S, als P de lijn $x = -p$ doorloopt.

2. Bepaal de meetkundige plaats van de punten waarvan de poollijnen t.o.v. de ellips

$$x^2+2y^2 = a^2$$

en de hyperbool

$$x^2-2y^2 = a^2$$

loodrecht op elkaar staan.

3. Buiten de parabool $y^2 = 2px$ kiest men een punt P; de lijn door P loodrecht op de X-as snijdt de parabool in A en B. Bepaal de meetkundige plaats van het punt P, als PA.PB $= k^2$. Bepaal deze meetkundige plaats ook, als P binnen de parabool gekozen wordt.

4. Gegeven is de hyperbool

$$4x^2-y^2 = 16.$$

Op de asymptoot l die een positieve richtingscoëfficiënt heeft, kiest men een punt P; de poollijn van P t.o.v. de hyperbool snijdt de lijn door P die evenwijdig is aan de andere asymptoot, in S.

a. Bewijs dat de poollijnen van al deze punten evenwijdig zijn aan l.

b. Bepaal de meetkundige plaats van S, als P de lijn l doorloopt.

5. a. Stel de algemene vergelijking op van een cirkel die zijn middelpunt op de X-as heeft en de parabool $y^2 = 2px$ raakt.
   b. Bewijs dat de afstand van het middelpunt van een dergelijke cirkel tot de lijn door de twee raakpunten constant is.

6. Bereken de tangens van de hoek waaronder de ellips $x^2+2y^2=10$ en de cirkel $x^2+y^2 = 6$ elkaar snijden.

7. Bewijs dat de ellips $2x^2+y^2 = a^2$ en de parabool $y^2 = 2px$ elkaar loodrecht snijden.

8. De poollijnen van een punt P t.o.v. de cirkel
$$x^2+y^2 = p^2$$
en t.o.v. de parabool
$$y^2 = 2px$$
snijden elkaar in S. Bepaal de meetkundige plaats van S, als P de lijn $x = -2p$ doorloopt.

9. De raaklijn in een punt P van de parabool
$$y^2 = 4x$$
snijdt de Y-as in A; de lijn door A en het brandpunt snijdt de lijn OP in S. Bepaal de meetkundige plaats van S, als P de parabool doorloopt. (Het geval dat P met O samenvalt, wordt buiten beschouwing gelaten.)

10. Men bepaalt de poollijn l van een punt P t.o.v. de ellips
$$x^2+2y^2 = 18.$$
Door het op de positieve X-as gelegen brandpunt trekt men een lijn l' evenwijdig aan l; deze snijdt de lijn OP in S. Bepaal de meetkundige plaats van S, als P variabel is.

11. Stel de vergelijkingen op van de gemeenschappelijke raaklijnen aan de ellipsen
$$3x^2+y^2 = 12 \quad \text{en} \quad x^2+3y^2 = 12.$$

12. Bepaal de meetkundige plaats van de punten waarvan de poollijn t.o.v. de cirkel $x^2+y^2 = 2r^2$ raakt aan de cirkel $x^2+y^2 = r^2$.

13. Op de parabool

$$y^2 = 2px \qquad (p > 0)$$

ligt een punt P waarvan de normaal door het punt $(a, 0)$ gaat. Welke waarden kan a dan aannemen? (P valt niet met O samen.)

14. Stel de vergelijking op van een ellips die de punten $(3, 0)$ en $(-3, 0)$ als brandpunten heeft en de lijn $x+y = 4$ raakt.

15. a. Stel de algemene vergelijking op van een ellips die de Y-as in O raakt, waarvan de lange as langs de X-as valt en waarvan de korte as gelijk is aan de helft van de lange as.
b. Aan elke ellips van dit stelsel trekt men de raaklijn uit het punt P $(0, 2)$ die niet met de Y-as samenvalt. Bepaal de meetkundige plaats van het raakpunt van deze lijn met de ellips.

16. a. Stel de vergelijking op van een cirkel door O waarvan het middelpunt op de Y-as ligt en die de hyperbool $x^2-y^2 = 8$ raakt.
b. Stel de vergelijkingen van de gemeenschappelijke raaklijnen in de raakpunten op.

17. a. Bewijs dat

$$a^2x^2+b^2y^2 = k^2 \qquad (a \neq 0,\ b \neq 0,\ k \neq 0),$$

waarin k variabel is, een stelsel gelijkvormige ellipsen voorstelt.
b. Voor welke waarde van k raakt de ellips $a^2x^2+b^2y^2 = k^2$ de lijn $x+y = a$?

18. De parabool

$$y^2 = 2px$$

en de cirkel

$$x^2+y^2 = 2ax$$

snijden elkaar in O, A en B. Welke betrekking bestaat er tussen a en p, als $\triangle$ OAB gelijkzijdig is?

19. a. De parabolen

$$y^2 = 2px \quad \text{en} \quad y^2 = -2p(x-a)$$

snijden elkaar loodrecht. Bewijs dat $a = p$.
b. De raaklijnen in een gemeenschappelijk punt van deze twee elkaar loodrecht snijdende parabolen snijden de X-as in A en B. Druk de lengte van AB in p uit.

20. Een willekeurige raaklijn aan de ellips

$$x^2+4y^2 = a^2$$

snijdt de raaklijnen in A $(a, 0)$ en B $(-a, 0)$ in P en Q. Bewijs dat de cirkel waarvan PQ een middellijn is, door de brandpunten van de ellips gaat.

21. Uit het op de positieve X-as gelegen brandpunt van de ellips

$$x^2+2y^2 = 2a^2$$

laat men een loodlijn neer op de raaklijn in een punt P van de ellips. Deze loodlijn snijdt de lijn OP in S. Bepaal de meetkundige plaats van S, als P de ellips doorloopt.

22. Een punt P van de ellips

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$$

wordt door lijnen verbonden met de punten A_1 $(a, 0)$ en A_2 $(-a, 0)$. Men laat uit het punt B_1 $(0, b)$ de loodlijn op A_1P neer en uit B_2 $(0, -b)$ de loodlijn op A_2P.
a. Bepaal de meetkundige plaats van het snijpunt van deze twee loodlijnen, als P de ellips doorloopt.
b. Bewijs dat de gevonden meetkundige plaats gelijkvormig is met de gegeven ellips.

23. De raaklijn in het punt P (x_1, y_1) aan de hyperbool $xy = a^2$ snijdt de asymptoten in A en B.
a. Stel de vergelijking van deze raaklijn op.
b. Bewijs dat P het midden van AB is.

24. Stel de vergelijking op van een parabool die de X-as als as heeft en de parabool $y^2 = 4x$ in het punt $(1, 2)$ loodrecht snijdt.

25. Stel de vergelijkingen op van de gemeenschappelijke raaklijnen aan de parabool $y^2 = 6x$ en de cirkel $x^2+y^2 = 8x$.

26. Een raaklijn aan

$$x^2-y^2 = a^2$$

snijdt de asymptoten van deze kromme in A en B. Onderzoek of de oppervlakte van $\triangle$ AOB onafhankelijk is van de keuze van de raaklijn.

27. a. Bewijs dat

$$\frac{x^2}{a^2+k}+\frac{y^2}{k}=1 \quad (a^2+k \neq 0,\ k \neq 0),$$

waarin k variabel is en a constant, een stelsel ellipsen en hyperbolen met gemeenschappelijke brandpunten voorstelt.

b. Bewijs dat door het punt (p, q) $(p \neq 0, q \neq 0)$ één ellips en één hyperbool van het stelsel gaat.

28. Stel de vergelijking op van de cirkel die zijn middelpunt op de X-as heeft en die de ellips $(x-1)^2+2y^2 = 6$ in het punt $(3, 1)$ loodrecht snijdt.

29. Stel de algemene vergelijking op van een ellips die de X-as en de lijnen $y = x+3$ en $y = -x+3$ raakt en waarvan een symmetrie-as langs de Y-as valt.

30. a. Welke betrekking bestaat er tussen p en r, als er een punt P bestaat waarvan de poollijnen t.o.v. $x^2+y^2 = r^2$ en $y^2 = 2px+2p$ samenvallen?

b. Bepaal in dat geval de meetkundige plaats van het punt P.

31. a. Op de asymptoot van

$$x^2-y^2 = a^2$$

die een positieve richtingscoëfficiënt heeft, kiest men een punt P en op de andere asymptoot een punt Q zó, dat $OQ = k \,.\, OP$ (P en Q liggen aan dezelfde kant van de X-as). Bewijs dat de meetkundige plaats van het snijpunt van de poollijnen van P en Q t.o.v. de hyperbool, als P de asymptoot doorloopt, een lijn door O is.

b. Welke lijnen door O vindt men voor geen enkele waarde van k als meetkundige plaats?

32. Door de hoekpunten van een vierkant gaan vier parabolen die hun top hebben in het snijpunt van de diagonalen. Bereken de tangens van de hoek waaronder de parabolen elkaar snijden.

33. Langs de parabool

$$y^2 = 2px$$

bewegen zich de punten P en Q zó, dat steeds $y_Q = -2y_P$; de raaklijnen in P en Q snijden elkaar in S. Bepaal de meetkundige plaats van S.

34. De cirkel $x^2+y^2 = 7ax$ snijdt de hyperbool $x^2-y^2 = 9a^2$ in A en B.
Bewijs dat het zwaartepunt van $\triangle$ OAB op de hyperbool ligt.

35. Stel de vergelijking op van een parabool die de X-as als as en de Y-as als richtlijn heeft en de lijn $y = 2x-1$ raakt.

36. De cirkel

$$2x^2+2y^2 = a^2+b^2$$

en de ellips

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$$

snijden elkaar in een punt S. Een tweede cirkel heeft S als middelpunt en gaat door O; deze cirkel snijdt de assen behalve in O nog in A en B.
Bewijs dat de lijn AB de ellips in S raakt.

37. De parabool

$$y^2 = 2px$$

en de ellips

$$2x^2+y^2 = 2a^2$$

snijden elkaar in A en B.
a. Bewijs dat de krommen elkaar loodrecht snijden.
b. Als AB de deellijn is van de hoek tussen de raaklijnen in A aan de beide krommen, dan is $3p^2 = 4a^2$. Bewijs dit.
c. Bepaal de meetkundige plaats van de snijpunten van de krommen in dit geval, als a en p variabel zijn.

38. Op de hyperbool $xy = 1$ ligt het punt P $(a, \frac{1}{a})$. Door P trekt men twee onderling loodrechte lijnen die de kromme nog in Q en R snijden. Bepaal de meetkundige plaats van het midden van QR, als de lijnen door P variabel zijn.

39. De lijn door de snijpunten van de cirkels

$$x^2+y^2 = r^2$$

en

$$x^2+y^2+2ax-2by = 0 \quad (a \neq 0, \ b \neq 0)$$

raakt de parabool $y^2 = 2px$.
a. Bewijs dat $r^2 : b^2 = p : a$.
b. Druk de coördinaten van het punt P van de parabool dat gelijke macht heeft t.o.v. de beide cirkels, in a, b en r uit.

40. De parabolen K_1 en K_2 zijn opvolgend gegeven door de vergelijkingen

$$y^2 = 2px \quad \text{en} \quad x^2 = 2py.$$

Bewijs dat met elk punt P van K_1 een zodanig punt Q van K_2 correspondeert, dat de poollijn van P t.o.v. K_2 samenvalt met de poollijn van Q t.o.v. K_1. (Het punt O blijft buiten beschouwing.)

41. De parabolen

$$y^2 = 2px \quad \text{en} \quad x^2 = 2kpy$$

snijden elkaar in het snijpunt dat niet met O samenvalt, onder een hoek waarvan de sinus gelijk is aan $\frac{3}{5}$. Bereken k.

42. De parabool $y^2 = 2px$ raakt de hyperbool $x^2-y^2 = -a^2$.
a. Welke betrekking bestaat er dan tussen a en p?
b. Bepaal de meetkundige plaats van het raakpunt van de twee krommen, als a en p variabel zijn.

43. Gegeven zijn de ellipsen

$$\frac{(x-a)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{en} \quad \frac{(x+a)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1.$$

De poollijnen van een punt P t.o.v. de beide ellipsen snijden elkaar in een punt S. Bepaal de meetkundige plaats van de punten P die zó gelegen zijn, dat PS evenwijdig is aan de X-as.

44. a. Stel de vergelijking op van de raaklijn in het punt $P(x_1, y_1)$ aan de ellips

$$(x-k)^2+4(y+k)^2 = 4.$$

b. Bepaal de meetkundige plaats van het punt P waarvoor de richtingscoëfficiënt van de raaklijn 1 is, als k variabel is.

45. De krommen

$$x^2-y^2 = a^2 \quad \text{en} \quad x^2+y^2 = r^2$$

snijden elkaar onder een hoek van 45°. Welke betrekking bestaat er dan tussen a en r?

46. Bepaal de meetkundige plaats van de punten waarvan de poollijnen t.o.v. de parabool $y^2 = 2px$ raken aan de parabool $x^2 = 2py$.

47. Voor de loodrecht op elkaar staande koorden OA en OB van de parabool $y^2 = 2px$ geldt $OA = 2 . OB$. Bereken de richtingscoëfficiënt van OB.

48. Gegeven zijn de parabool $y^2 = 6x$ en de cirkel $x^2+y^2 = 2rx$.
a. Voor welke waarden van r hebben de krommen behalve O nog andere punten gemeen?
b. Noem deze snijpunten A en B en het middelpunt van de cirkel M. Bepaal de meetkundige plaats van de middens van MA en MB, als M de X-as doorloopt.

49. De hoekpunten van vierhoek ABCD zijn A (1, 0), B (0, 1), C (—1, 0) en D (0, —1). Stel de algemene vergelijking op van een ellips die de zijden van deze vierhoek raakt en waarvan de assen langs de coördinaatassen vallen.

50. a. Voor welke waarden van a stelt

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{1-a^2} = 1$$

een ellips voor?
b. Welke punten kunnen brandpunt van een ellips van dit stelsel zijn?
c. Van welke van deze ellipsen is de excentriciteit gelijk aan $\frac{1}{2}$?

OVER TWEE STELLINGEN

door

L. CRIJNS

1. Voorzover mij bekend is, wordt in alle schoolboeken de stelling „de snijlijn s van de vlakken α en β, beide loodrecht op vlak γ, is loodr. op γ" in § n op dezelfde manier bewezen door teruggrijpen op § n—1 en § n—2. Waarom toch, terwijl 'n daaraan geeïgende, rechtlijnige methode voor de hand ligt, n.l. s staat loodr. op de benen in γ van de twee standhoeken (α, γ) en (β, γ)?

2. 't Lijkt me niet ondienstig, de stelling „de hoek, die 'n lijn AB met vlak V vormt, is kleiner dan de hoek (hoeken), die ze met elke andere richting van V maakt", met 't volgende aan te vullen.

Als AC (A in V) de proj. is van AB en AD 'n willekeurige lijn in V, dan geldt tevens: de scherpe $\angle$ DAC $<$ $\angle$ DAB. Vooreerst kan dit als 'n toepassing van de juist bewezen stelling zelf behandeld worden, n.l. bij vervanging van AB door AD en V door vlak ABC. Maar 'n weinig goniometrie (nog niet trigon.) werpt 'n verhelderend licht op de zaak. Neem D zó aan, dat AD $\perp$ CD en dus ook $\perp$ BD staat, dan volgt tussen de $\angle\angle$ DAB, BAC en DAC zonder moeite de betrekking $\cos \alpha = \cos \beta . \cos \gamma$, waaruit als 'n welkome goniom. oefening de twee bedoelde ongelijkheden verbonden afgeleid worden.

DE ACTUARIËLE STUDIERICHTING AAN DE UNIVERSITEIT VAN AMSTERDAM

Met ingang van het cursusjaar 1956—1957 is voor de bovengenoemde studie een nieuwe regeling van kracht geworden, waarbij de examens plaats vinden in de „Verenigde faculteiten der wis- en natuurkunde en der economische wetenschappen".

Belanghebbenden verwijzen wij naar het prospectus onder de hierboven geplaatste titel, dat verkrijgbaar is bij de heer A. J. van der Loo, math. docts., p/a De Verzekeringskamer, Keizersgracht 569—571, Amsterdam.

Red.

BOEKBESPREKING

U. Filippi, Natuurkunde, vertaald door Prof. J. B. Westerdijk. L. J. Veen, Amsterdam, z.j. (oorspronkelijke titel: Connaissance du monde physique), 319 blz., prijs geb. *f* 22,50. Bekroond door de Académie des sciences de Paris (prix Henri de Parville, 1947).

De schrijver heeft zich als doel gesteld de bekoring, die van de natuurkunde uitgaat, als men een juist inzicht in haar bouw en methode heeft, een brede kring van belangstellenden deelachtig te doen worden. Hij gaat daartoe uit van de school-natuurkunde en beperkt er zich in het eerste deel van het boek toe de begrippen van de elementaire natuurkunde aan een kritische beschouwing te onderwerpen en daardoor te verhelderen. In hoofdzaak behandelt hij daarbij de begrippen van de mechanica, de thermodynamica en de optica. Dat hij daarin in een kort bestek van 99 blz. ten volle zou slagen, is niet te verwachten. Bij de fundering van elk begrip blijven vragen onbeantwoord; sommige begrippen, zoals het begrip temperatuur, worden wel erg summier toegelicht. Het is echter toch zeer te waarderen, dat de schrijver niet tracht interessante bijzonderheden te vermelden, maar er zich geheel aan wijdt begrip en methode duidelijk uiteen te zetten. Aan de Nederlandse editie is bovendien nog een aanhangsel toegevoegd, waarin het elektro-magnetisme beschouwd wordt.

In het tweede deel (73 blz.) wordt de atomaire structuur van de materie besproken. Dit deel is het minst gelukkige van het gehele boek. Het maakt een enigszins kaleidoscopische indruk door de veelheid van onderwerpen, die de revue passeren, zonder dat de niet geschoolde lezer daarbij de gelegenheid krijgt voldoende te begrijpen, waar het om gaat.

Het derde deel (54 blz.) behandelt de speciale en de algemene relativiteitstheorie en de golfmechanica. In dit korte bestek is de schrijver er wel in geslaagd de principes van deze delen van de moderne fysica op populaire wijze uiteen te zetten.

Zoals uit de bespreking blijkt, heb ik het boek gelezen zowel met gevoelens van bewondering als van teleurstelling. Met name in het eerste deel, waar een nauwkeurige formulering van het grootste belang is, heb ik de indruk gekregen, dat deze nauwkeurigheid op vele plaatsen door de vertaling teloor gegaan is. Door weinig accurate correctie zijn in het boek verscheidene storende drukfouten blijven staan.

P. G. J. VREDENDUIN

Actes du Deuxième Congrès International de l'Union Internationale de Philosophie des Sciences, Zürich 1954. Editions du Griffon, Neuchâtel (Suisse), 1955. 5 volumes:

I. Exposés généraux;
II. Physique — Mathématiques;
III. Théorie de la connaissance — Linguistique;
IV. Philosophie et science — Histoire de la philosophie;
V. Sociologie — Psychologie.

Op de vele congressen, die gewijd worden aan de wiskunde en aan andere takken der exacte wetenschap, wordt vrijwel steeds één sectie, de laatste, uitgetrokken voor de philosophie, de geschiedenis en de didactiek van het betreffende vak. Dat is geen volkomen bevredigende oplossing van een moeilijk vraagstuk, en er is dan ook een streven, congressen te organiseren, uitsluitend gewijd aan de philosophie, aan de geschiedenis of aan de didactiek, hetzij van één der exacte vakken, hetzij van enkele of zelfs van alle. Toch mag de eerder genoemde, thans snel in onbruik gerakende regeling niet alléén verklaard worden uit een (overigens begrijpelijk) streven, enkele kleine groepen van halve outsiders door combinatie toch in het organisatorische gareel te laten lopen. Er is wel degelijk een zekere affinitieit tussen de geschiedenis, de didactiek en de philosophie der exacte wetenschappen.

Het is dan ook ongetwijfeld te verwachten, dat er van de zijde van de leraren in de wiskunde belangstelling zal zijn voor wat er behandeld wordt op de congressen, die de laatste jaren aan de philosophie der exacte wetenschappen zijn gewijd. En zo is dus een bespreking van de hierboven vermelde congres-handelingen in *Euclides* zeer zeker op haar plaats.

Helaas moet ik er onmiddellijk op wijzen, dat de organisatoren van dit congres de grenzen van het te bespreken gebied zeer ruim hebben gekozen door een belangrijke plaats toe te kennen aan kennistheorie, taalwetenschap, algemene wetenschapsleer, geschiedenis der wijsbegeerte, sociologie en psychologie. Onder de bijdragen, die wel tot de wijsbegeerte der exacte wetenschappen in stricte zin kunnen worden gerekend, zijn er verscheidene, die een wel zeer dilettantisch karakter hebben; dit geldt zelfs voor enkele

van de rapporten, die in een plenaire zitting van het congres zijn voorgedragen. Zelfs van de enkele werkelijk representatieve figuren, die op het congres het woord hebben gevoerd, hebben enigen toegegeven aan een streven van de zijde van de congres-leiding, het technisch-wetenschappelijke zoveel mogelijk te ecarteren. Ik wil nu de meest waardevolle bijdragen, voorzover deze met enige goede wil tot het gebied van de philosophie der exacte wetenschappen kunnen worden gerekend, kort typeren.

In vol. I geeft J. Piaget een overzicht van de door hem ontwikkelde *épistémologie générale;* hoewel tegen de opvattingen van deze zeer verdienstelijke psycholoog van verschillende zijden ernstige bedenkingen zijn ingebracht (men zal zich de enige jaren geleden door Bunt gepubliceerde kritiek herinneren), zijn zij toch zeker ernstige overweging waard. Uiterst belangrijk en sympathiek acht ik de door Kurt Reidemeister ontwikkelde *Prolegomena einer kritischen Philosophie,* die zich echter niet lenen tot een korte samenvatting. H. Feigl biedt een zeer informatief overzicht van actuele problemen van het logisch empirisme. Het referaat van A. Pap, gewijd aan het probleem van de logische analyse der zogenaamde *subjunctive conditionals* (of contrary-to-fact conditionals; bijvoorbeeld: als de maan er niet was, zou er dan leven op aarde kunnen zijn?), sluit hierbij goed aan. Het rapport van J. L. Destouches geeft een goed overzicht van de door hem reeds eerder ontwikkelde opvattingen.

Vol. II brengt een goede bijdrage van E. H. Hutten over het beginsel van Pauli. Zeer interessant vind ik de beschouwingen van P. Kustaanheimo over de mogelijkheid, een eindig model van het heelal te construeren; het uitgangspunt ligt in de overweging, dat er eindige geometrieën bestaan, die aan een groot aantal van de gebruikelijke meetkundige axioma's (natuurlijk niet aan alle) voldoen. P. Lorenzen stelt een verruiming voor van het finiete standpunt dat gebleken is, slechts voor een zeer klein gedeelte van de klassieke wiskunde een grondslag te kunnen leveren. P. C. Rosenbloom behandelt constructieve aequivalenten van een aantal stellingen uit de klassieke (niet-constructieve) analyse. De bijdrage van onze landgenoot E. Teensma over een intuitionistische interpretatie van de klassieke analyse sluit aan bij de reeds genoemde van Lorenzen en Rosenbloom, maar de door hem uitgesproken stellingen zijn (naar het me voorkomt) ten dele niet juist gefundeerd en ten dele waarschijnlijk niet correct.

Uit vol. III valt alleen te vermelden een analyse van de klok paradox in de bijzondere relativiteitstheorie door A. Grünbaum,

uit vol. IV in het geheel niets, en uit vol. V. een analyse van de denkbeelden van Piaget door de Engelse logicus W. Mays.

Van de circa 100 uitgebrachte rapporten zijn er dus slechts een stuk of twaalf die op een congres, gewijd aan de philosophie der exacte wetenschappen, op hun plaats zouden zijn geweest. Het resultaat van het Zürichse congres is dus wel bijzonder pover geweest, vooral ook in vergelijking met dat van de beide in 1936 en 1949 te Parijs gehouden grote congressen en met dat van de vele kleinere bijeenkomsten, die sinds ongeveer 1930 vrijwel jaarlijks hebben plaatsgevonden.

Ik acht dit een zeer bedroevende zaak, en wel om twee redenen. Ten eerste moeten de besproken congres-handelingen, zoals deze thans in circulatie komen, buiten de eigenlijke vakkringen een volkomen onjuiste indruk vestigen omtrent de omvang, het karakter en de hoedanigheid van de onderzoekingen, die gedurende de laatste jaren op het hier bedoelde gebied zijn verricht.

In de tweede plaats moeten de congres-handelingen (ten onrechte) nieuw voedsel geven aan de bij buitenstaanders telkens weer opkomende twijfel aangaande het bestaansrecht van afzonderlijke organisaties, afzonderlijke congressen, afzonderlijke tijdschriften, ... voor het gebied van de wijsbegeerte der exacte wetenschappen. Dit bestaansrecht vindt zijn grond in twee overwegingen: (1) de ondervinding leert sedert jaren, dat bedoeld gebied noch in de bestaande wijsgerige organen noch in de bestaande exact-wetenschappelijke organen behoorlijk tot zijn recht komt; dit ligt ten dele aan technische moeilijkheden van zeer platvloers karakter, ten dele eenvoudig aan het ontbreken van de juiste atmospheer; (2) de onderzoekingen op bedoeld gebied hebben thans een zodanige omvang aangenomen, dat de oprichting van afzonderlijke organen financiëel verantwoord is, en ze hebben een zodanig „technisch" karakter gekregen, dat inmenging van buitenstaanders als volkomen misplaatst moet worden beschouwd.

Deze beide overwegingen, die zeer gemakkelijk met feitenmateriaal te staven zouden zijn, worden door de congres-handelingen (in schijn) gelogenstraft. Het komt mij voor dat de verantwoordelijke Union de zaak, waarvoor zij behoort te staan, door de organisatie (beter wellicht: door het toelaten) van dit congres een bijzonder slechte dienst heeft bewezen.

E. W. Beth

ORIËNTERENDE CURSUS OVER STATISTIEK VAN HET MATHEMATISCH CENTRUM

De Afdeling Mathematische Statistiek van het Mathematisch Centrum heeft besloten, mede op verzoek van het Haags Leraren Contact, in 1957 ook in Den Haag een oriënterende cursus over Statistiek te gaan geven, voornamelijk bedoeld voor leraren en aanstaande leraren in de Wiskunde, o.a. in verband met de mogelijke invoering van de Statistiek als leervak in het Middelbaar en Voorbereidend Hoger Onderwijs.

Deze cursus, die geheel analoog zal zijn aan die, welke thans door Prof. Dr. J. Hemelrijk in Amsterdam wordt gegeven, staat onder leiding van Mejuffrouw C. van Eeden, math. dra, medewerkster van bovengenoemde Afdeling en zal plaatsvinden in het gebouw van het Paedagogisch Centrum, Lijnbaan 32, Den Haag, op woensdagavonden om de veertien dagen, te beginnen op woensdag 9 januari 1957; aanvang 20.00 uur precies.

Het cursusgeld is vastgesteld op *f* 10,— per persoon voor één jaar. Een syllabus zal aan de deelnemers worden uitgereikt.

Belangstellenden voor deze cursus, die eveneens toegankelijk zal zijn voor niet-leraren, gelieven zich vóór 1 januari 1957 bij de Administratie van het Mathematisch Centrum, 2e Boerhaavestraat 49 te Amsterdam, op te geven, onder gelijktijdige overmaking van het cursusgeld op postgirorekening nr. 462890 ten name van het Mathematisch Centrum, onder vermelding op het girostrookje: „Cursus Statistiek Den Haag".

NIEUW PROGRAMMA WISKUNDE L.O.

Blijkens een publikatie van het Ministerie van Onderwijs, Kunsten en Wetenschappen wordt het examen wiskunde L.O. in 1957 afgenomen volgens de nieuwe regeling (van 10 september 1955). Volgens de oude regeling kunnen in 1957 nog examen doen de afgewezen kandidaten van 1956 en zij, die in 1956 na hun aanmelding door ziekte niet aan het examen hebben kunnen deelnemen. Dit laatste moet blijken uit een aan het ministerie te zenden doktersverklaring.

OFFICIËLE MEDEDELING VAN L.I.W.E.N.A.G.E.L.

Ledenvergadering op zaterdag 5 januari 1957 om 10.00 uur in Hotel „Noord-Brabant", Vredenburg, UTRECHT.

Agenda:

1. Opening.
2. Notulen van de vorige ledenvergadering. (Deze zijn gepubliceerd in het Weekblad van 14 september 1956 en in Euclides, 32e jrg. no. 3.)
3. Benoeming kascommissie.
4. Bespreking van de wiskundeopgaven van het schriftelijk eindexamen gymnasium 1956.
5. Lezing door Dr. J. B. Ubbink, Leiden: „Filosofie en Natuurwetenschappen."

Om ongeveer 13.30 uur zal de vergadering geschorst worden voor de lunch. Voortzetting van de vergadering om 14.00 uur met punt

6. Lezing door Prof. Dr. E. J. Dijksterhuis, Bilthoven: „Kan de Geschiedenis van de Natuurwetenschappen iets bijdragen tot het onderwijs in de Natuurwetenschappen in de A-afdeling van het Gymnasium?"
7. Rondvraag.
8. Sluiting.

De secretaris,

D. LEUJES.

MEDEDELING VAN DE PENNINGMEESTER VAN WIMECOS

De contributie bedraagt *f* 8,— per jaar, bij het begin van het verenigingsjaar te storten op postrekening 143917 ten name van Wimecos te Amsterdam.

Het verenigingsjaar loopt van 1 september t/m 31 augustus. Zij, die hun contributie nog niet hebben betaald, worden verzocht dit te doen vóór 15 december a.s.

KALENDER

Mededelingen voor deze rubriek kunnen in het volgende nummer worden opgenomen, indien zij binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer worden ingezonden bij de redactie-secretaris, Kraneweg 71 te Groningen.

CURSUSSEN VOOR AFGESTUDEERDEN

In het kader van de cursussen voor afgestudeerden (in het bijzonder leraren) door de Faculteit der Wis- en Natuurkunde aan de Rijksuniversiteit te Utrecht georganiseerd, zullen de volgende lezingen plaats vinden:

17 en 31 januari, 14 februari:

Prof. Dr. F. van der Blij: Facetten van een moderne opbouw van algebra en analyse.

24 januari, 7, 21, 28 februari, en 7 maart:

Prof. Dr. H. Freudenthal: Waarschijnlijkheidsrekening en mathematische statistiek.

De reiskosten zullen aan leraren gedeeltelijk kunnen worden vergoed. Hieromtrent worden nog mededelingen verstrekt.

De colleges worden gegeven in het *Mathematisch Instituut, Boothstraat* 17 *te Utrecht.* Begin 19.30 uur. Belangstellenden wordt verzocht zich zo mogelijk van te voren op te geven.

MONDELINGE EXAMENS KI en KV:

Op verzoek van H. E. de Staatssecretaris van Onderwijs, Kunsten en Wetenschappen vermelden wij, dat,

A. behoudens onvoorziene omstandigheden, het mondelinge gedeelte van de examens ter verkrijging van de akte van bekwaamheid tot het geven van middelbaar onderwijs in de wiskunde (akte K I en K V), voor zover die in het openbaar zullen worden gehouden, zal worden afgenomen te' s-Gravenhage, in het gebouw aan de Fluwelen Burgwal 22, van 2 oktober af en wel:
voor de akte K I
op iedere dinsdag, woensdag, donderdag en vrijdag telkens van 9.30 uur tot 12.15 uur en van 14.00 uur tot 16.45 uur en
voor de akte K V
op iedere zaterdag telkens van 9.30 uur tot 11.45 uur en van 14.00 uur tot 16.15 uur;

B. zij, die een of meer van de onder A bedoelde examens wensen bij te wonen, zich vooraf moeten wenden tot de secretaris van de examencommissie, de heer A. Smits, Thorbeckelaan 79 te 's-Gravenhage.

Red.